

Math. Un.

Gallenkamp, W.

62^{ms}

Die
Elemente der Mathematik.

Ein Leitfaden
für den mathematischen Unterricht
an Gymnasien und Realschulen.

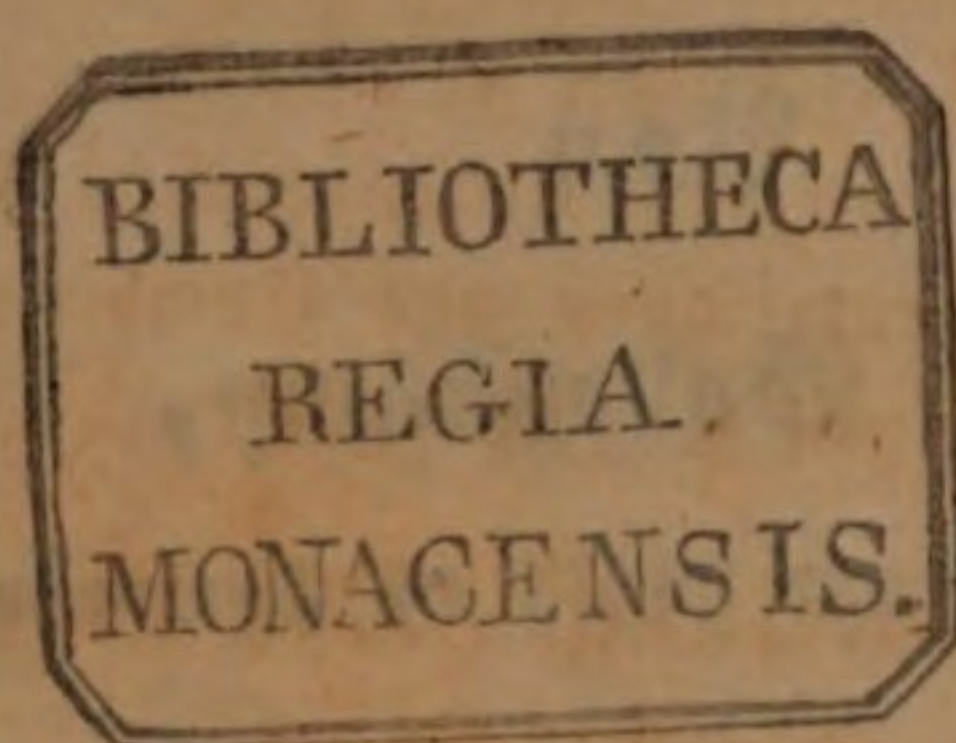
Von
W. Gallenkamp,
Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Wesel.

Mit zwei Figurentafeln.

Wesel, 1850.

Beckersche Buchhandlung.
(W. Becker.)

458. 9



Inhalt.

Erste Abtheilung. Die Arithmetik und Algebra.

Einleitung §. 1—3	Seite 1
Erstes Capitel. Die 4 Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen §. 4—29	5
Vom Maaße der Zahlen §. 22—29	13
Zweites Capitel. Die Grundrechnungsarten in Brüchen §. 30—55	18
Von den Decimalbrüchen §. 42—55	25
Drittes Capitel. Die Grundrechnungsarten in algebraischen Zahlen §. 56—66	31
Viertes Capitel. Lehre von den Potenzen §. 67—82	39
Anwendung der Potenzlehre auf Zahlensysteme §. 75—82	48
Fünftes Capitel. Die Lehre von den Logarithmen §. 83—89	62
Sechstes Capitel. Die einfachsten Reihen §. 90—99	67
Siebentes Capitel. Die Lehre von den Kettenbrüchen §. 100—107	75
Achtes Capitel. Von den Permutationen und Combinationen §. 108—117	86
Neuntes Capitel. Die Gleichungen §. 118—142	96

Zweite Abtheilung. Die Geometrie.

I. Die Planimetrie.

Einleitung §. 1—4	125
Erstes Capitel. Von der graden Linie und der Lage grader Linien gegen einander §. 5—15	127
Zweites Capitel. Vom Dreieck §. 16—26	132
Drittes Capitel. Vom Viereck und Vieleck §. 27—37	140
Viertes Capitel. Größenvergleichung der gradlinigen geschlossenen Figuren §. 38—50	145
Fünftes Capitel. Formvergleichung der gradlinigen Figuren §. 51—63	154
Sechstes Capitel. Vom Kreise §. 64—90	164

II. Die Stereometrie.

Erster Abschnitt. Von den unvollständig begrenzten räumlichen Gebilden.

Erstes Capitel. Von der Lage der Punkte, graden Linien und Ebenen im Raume §. 1—8	183
Zweites Capitel. Von den körperlichen Ecken und sphärischen Dreiecken §. 9—19	190

Zweiter Abschnitt. Von den Körpern.

Erstes Capitel. Allgemeine Eigenschaften der Polyeder §. 20—22	208
Zweites Capitel. Von den prismatischen und pyramidalischen Körpern §. 22—44	211
Drittes Capitel. Die Kugel §. 45—53	220
Viertes Capitel. Die regelmäßigen Körper §. 54—63	224

Dritte Abtheilung. Die Trigonometrie.

Erstes Capitel. Die trigonometrischen Functionen §. 1—21	233
Zweites Capitel. Die ebene Trigonometrie §. 22—36	263
Drittes Capitel. Die sphärische Trigonometrie §. 37—43	279

Druckfehler.

- S. 25. 3. 12 v. oben lies 0,47 statt 4,7.
 S. 47. 3. 4 v. oben lies der statt des.
 S. 84. 3. 11 v. unten lies kleiner statt feiner.
 S. 95. 3. 5 v. oben lies Buches statt Bruches.
 S. 104. 3. 17 v. unten und folg. lese man: lege die Elemente der auf diese Weise auftretenden 1. 2. 3. . . . n Permutationen in den durch sie gegebenen Reihenfolgen den Faktoren des Productes abed... als Indices bei, und verbinde die so entstandenen Größen abwechselnd durch die Vorzeichen $\pm$ mit einander.

- S. 113. 3. 19 v. oben lies:

$$q = \frac{\sqrt[3]{-c - \sqrt{c^2 + \frac{4}{27}b^3}}}{2} \text{ statt } q = \frac{\sqrt[3]{-c + \sqrt{c^2 + \frac{4}{27}b^3}}}{2}$$

- S. 113. 3. 20 v. oben lies:

$$+ \frac{\sqrt[3]{-c - \sqrt{c^2 + \frac{4}{27}b^3}}}{2} \text{ statt } + \frac{\sqrt[3]{-c + \sqrt{c^2 + \frac{4}{27}b^3}}}{2}$$

- S. 185. 3. 20 v. oben lies der Ebene statt die Ebene.

- S. 208. 3. 1 von unten lies W statt K.

- S. 238. 3. 13 v. unten lies ef^2 statt oe^2 .

- S. 250. 3. 7 v. unten lies $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ statt $\left(\frac{\pi}{4}\right) - \alpha$.

Erste Abtheilung.

Die Arithmetik und Algebra.

Genanntes Verhältniß der Einheit oder der Gleichheit ist; eine gebrochene Zahl ist der Ausdruck eines Verhältnisses, bei welchem die Einheit nicht der Fall ist.

3) In bestimmte und unbestimmte. Bestimmte Zahlen sind solche, welche einen bestimmten Zahlenwerth haben; unbestimmte sind solche, welche keinen bestimmten Zahlenwerth annehmen können.

Die Zeichen für bestimmte Zahlen sind die Ziffern, für unbestimmte die Buchstaben.

Die benannten Zahlen bleiben von unserer Betrachtung ganz ausgeschlossen. Die bestimmten und unbestimmten Zahlen werden gleichzeitig betrachtet, doch so, daß in dem ersten Capitel vorzugsweise die bestimmten, später vorzugsweise die unbestimmten Zahlen in Betrachtung kommen.

Einleitung.

§. 1. Die Aufgabe der Mathematik ist: Erkenntniß der Gesetze der Größe und der Form. Gegenstand mathematischer Betrachtung kann alles sinnlich Wahrnehmbare sein, aber nur rücksichtlich seiner Größe, oder seiner Form, oder beider. Die Gegenstände mathematischer Betrachtung sind also nur Abstrakta.

§. 2. Das Nächstliegende ist: Betrachtung der sinnlichen Wahrnehmungen bloß rücksichtlich ihrer Größe. Bei dieser Beschränkung ist keine andere Betrachtung denkbar, als die Vergleichen. Nur gleichartige Größen können verglichen werden. Das Resultat der Größenvergleichen ist ein Verhältniß. Der Ausdruck eines Verhältnisses ist die Zahl. Die Zahl ist somit hervorgegangen aus reiner Größenbetrachtung; sie kann aus Zahlen auf die mannigfaltigste Art zusammengesetzt sein, kann also die mannigfaltigsten Formen haben. Die Zahl in allen ihren Formen bildet die Aufgabe der Arithmetik. Zahlen verbinden, Zahlenverbindungen umformen heißt: Rechnen.

Das Vergleichen der Größen heißt auch Messen; die eine der beiden verglichenen Größen heißt: Einheit; die andere: gemessene Größe.

Zwei Größen können auch mittelst einer dritten gleichartigen Größe, einer Hülfeinheit, mit einander verglichen werden; und es geschieht dies im praktischen Leben gewöhnlich.

§. 3. Die Zahlen werden eingetheilt:

1) In benannte und unbenannte. Eine benannte Zahl ist eine solche, welcher eine bestimmte sinnliche Einheit zu Grunde liegt; eine unbenannte eine solche, bei welcher dies nicht der Fall ist, bei welcher von der zu Grunde liegenden Einheit abstrahirt ist.

2) In ganze und gebrochene. Eine ganze Zahl ist der Ausdruck eines Verhältnisses, in welchem die gemessene Größe ein

genaues Vielfaches der Einheit oder ihr gleich ist; eine gebrochene Zahl ist der Ausdruck eines Verhältnisses, bei welchem dies nicht der Fall ist.

3) In bestimmte und unbestimmte. Bestimmte Zahlen sind solche, welche einen bestimmten, besondern Zahlenwerth haben; unbestimmte sind solche, welche jeden besondern Zahlenwerth annehmen können.

Die Zeichen für bestimmte Zahlen sind die Ziffern, für unbestimmte die Buchstaben.

Die benannten Zahlen bleiben von unserer Betrachtung ganz ausgeschlossen. Die bestimmten und unbestimmten Zahlen werden gleichzeitig behandelt, doch so, daß in den ersten Capiteln vorzugsweise die bestimmten, später vorzugsweise die unbestimmten Zahlen in's Auge gefaßt werden.

g u n t i l u i

2. 1. Die Aufgabe der Mathematik ist: die Eigenschaften der Zahlen und der Formen. Gegenstand mathematischer Betrachtung kann alle künftige Beobachtung sein, aber nur hinsichtlich seiner Größe, oder seiner Form, oder seiner Lage. Die Eigenschaften mathematischer Betrachtung sind alle nur Abstraktion.

2. 2. Das Abstrahiren ist: die Betrachtung der Eigenschaften der Zahlen und der Formen. Gegenstand mathematischer Betrachtung kann alle künftige Beobachtung sein, aber nur hinsichtlich seiner Größe, oder seiner Form, oder seiner Lage. Die Eigenschaften mathematischer Betrachtung sind alle nur Abstraktion.

Das Abstrahiren ist: die Betrachtung der Eigenschaften der Zahlen und der Formen. Gegenstand mathematischer Betrachtung kann alle künftige Beobachtung sein, aber nur hinsichtlich seiner Größe, oder seiner Form, oder seiner Lage. Die Eigenschaften mathematischer Betrachtung sind alle nur Abstraktion.

Das Abstrahiren ist: die Betrachtung der Eigenschaften der Zahlen und der Formen. Gegenstand mathematischer Betrachtung kann alle künftige Beobachtung sein, aber nur hinsichtlich seiner Größe, oder seiner Form, oder seiner Lage. Die Eigenschaften mathematischer Betrachtung sind alle nur Abstraktion.

Das Abstrahiren ist: die Betrachtung der Eigenschaften der Zahlen und der Formen. Gegenstand mathematischer Betrachtung kann alle künftige Beobachtung sein, aber nur hinsichtlich seiner Größe, oder seiner Form, oder seiner Lage. Die Eigenschaften mathematischer Betrachtung sind alle nur Abstraktion.

Das Abstrahiren ist: die Betrachtung der Eigenschaften der Zahlen und der Formen. Gegenstand mathematischer Betrachtung kann alle künftige Beobachtung sein, aber nur hinsichtlich seiner Größe, oder seiner Form, oder seiner Lage. Die Eigenschaften mathematischer Betrachtung sind alle nur Abstraktion.

Erstes Capitel.

Die 4 Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen.

§. 4. Es gibt nur 9 Ziffern, 9 Zeichen für bestimmte Zahlen, aber unendlich viele Zahlen. Die Zeichen und Namen für die über die neun kleinsten ganzen Zahlen hinausgehenden ganzen Zahlen werden durch Verbindung der Zeichen und der Namen dieser 9 Zahlen gebildet. Das Gesetz, nach welchem sie gebildet werden, heißt das dekadische Zahlensystem. Das Wesen desselben besteht darin, daß den 9 Zahlen unendlich viele verschiedene, gesetzmäßig geordnete Einheiten zu Grunde gelegt werden, und daß die daraus hervorgehenden Zahlen zusammengezählt (addirt) werden.

Die Einheiten befolgen das Gesetz, daß jede höhere das Zehnfache der nächst niederen ist. Es geht hieraus hervor, daß jede ganze Zahl durch das Zahlensystem dargestellt werden kann, sobald Zeichen und Namen für die Einheiten vorhanden sind.

Die Namen für die Einheiten sind: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, u. s. w. Die abkürzende Bezeichnung derselben besteht in der Nebeneinanderordnung der Ziffern, der Art, daß die Ziffer, welche die Anzahl der Einer bezeichnet, am meisten rechts steht, die der Zehner unmittelbar links daneben u. s. w. Dadurch wird ein Ausfüllungszeichen für die Stelle etwa fehlender Einheiten nöthig; es ist die Null, 0. Die Einheiten werden demnach aus der Stellung der Ziffern erkannt und erhalten deshalb den Namen: Stellenwerth.

Zum bequemeren Lesen und Schreiben größerer Zahlen, werden die Einheiten, die Stellenwerthe, nach Ordnungen und Klassen zusammengefaßt. Je 3 Stellen, von der Einerstelle anfangend, bilden eine Ordnung; je 2 Ordnungen, von der niedrigsten anfangend, bilden eine Klasse. In jeder Klasse gibt es demnach eine Einer-Ordnung und eine Tausender-Ordnung. Die Klassen heißen: Einer-, Million-, Billion-, u. s. w. Klasse. Demnach ist die Regel für das Aussprechen geschriebener mehrziffriger Zahlen folgende:

Man theilt die Zahl nach Ordnungen und Klassen ab, spricht die einzelnen Klassen nach ihrer Reihenfolge von der höchsten an mit Hinzufügung des Klassennamens aus, (nur der Name der Einerklasse wird nicht ausgesprochen) indem man in jeder Klasse von den vorhandenen Ordnungen zuerst die Tausender-Ordnung mit Hinzufügung des Ordnungsnamens, dann die Einer-Ordnung ohne den Ordnungsnamen ausspricht.

Hierdurch ist das Aussprechen vielziffriger Zahlen auf das Lesen dreiziffriger zurückgeführt. Regel dafür. — Ferner ergibt sich die Regel für das Schreiben mehrziffriger Zahlen.

Jede Zahl, welche nach dem dekadischen Zahlensystem dargestellt ist, heißt eine dekadische. Auch die Zahlen 1 bis 9 werden unter dem Namen dekadischer mitbegriffen.

1. Addition.

§. 5. Addiren heißt zusammenzählen, mehrere Zahlen zu einer Gesamtzahl vereinigen. Die zu addirenden Zahlen heißen *Summanden*, die Gesamtzahl heißt *Summe*. Das Additionszeichen ist $+$. So ist $35 + 105 + 27$ die Summe der Zahlen 35, 105, 27; $a + b + c$ die Summe der Zahlen a , b , c . Eine Summe, ausgedrückt durch ihre Summanden, heißt eine mehrgliedrige Größe (ein Polynom); die Summanden Glieder.

§. 6. Aus dem Begriff der Zahl und der Addition ergibt sich, daß, wenn mehrere Zahlen zu addiren sind, die Ordnung der Summanden willkürlich ist. Symbolisch ausgedrückt: $(a+b)+c = (a+c)+b = (b+c)+a = a+(b+c)$ u. s. w. $= a+b+c$. — Bedeutung der Klammern.

§. 7. Die Addition dekadischer Zahlen hat die Aufgabe, die Summe dekadischer Zahlen in Form einer dekadischen Zahl darzustellen. Es geschieht dies vermöge §. 6 nach folgender Regel:

Man schreibt die Zahlen so unter einander, daß die gleichnamigen Stellen unter einander stehen und addirt stellenweise, bei der niedrigsten anfangend. Ist die Summe der einer Stelle angehörenden Zahlen größer als 9, so reducirt man auf die nächste höhere.

2. Subtraction.

§. 8. Erklärung. Subtrahiren heißt eine Zahl suchen, welche zu einer gegebenen Zahl, dem Subtrahend, addirt, eine andere gegebene Zahl, den Minuend, giebt. Die gesuchte Zahl heißt Differenz. Demnach ist die Differenz eine Zahl, welche zum Subtrahend addirt den Minuend giebt. Das Subtractionszeichen ist $-$. Der Minuend steht vor, der Subtrahend hinter demselben. Demnach ist $25 - 17$ die Differenz der Zahlen 25 und 17, d. h. $a - b$ die Differenz der Zahlen a und b d. h. $a - b$. Der Minuend ist immer größer als der Subtrahend.

§. 9. Wenn mehrere Zahlen durch Addition und Subtraction zu verbinden sind, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung man die Operationen folgen läßt, vorausgesetzt, daß für jede Subtraction der Minuend größer ist, als der Subtrahend. Symbolisch ausgedrückt:
 $(a - b) + (c - d) = \{ (a - b) + c \} - d = \{ (a + c) - b \} - d = (a + c) - (b + d) = \text{u. s. w.} = a - b + c - d.$

§. 10. Die Subtraction dekadischer Zahlen hat die Aufgabe, die Differenz dekadischer Zahlen in Form einer dekadischen Zahl darzustellen. Es geschieht dies vermöge §. 9 nach der Regel:

Man schreibt den Subtrahenden so unter den Minuenden, daß die gleichnamigen Stellen unter einander stehen und subtrahirt stellenweise. Ist der Werth einer Ziffer des Subtrahenden größer als der der entsprechenden des Minuenden, so borgt man, d. h. man reducirt eine 1 der höheren Stelle des Minuenden auf die betreffende, an welcher dieselbe den Zifferwerth 10 hat. Finden sich an den nächst höheren Stellen Nullen, so reducirt man von der nächst höheren bedeutsamen Stelle eine 1 auf die nächst niedere Stelle, von dieser wieder eine 1, und so fort, bis auf die betreffende; aus jeder Null wird dadurch eine Neun.

3. Multiplikation.

§. 11. Erklärung. Multipliciren heißt eine Zahl so aus einer gegebenen Zahl, dem Multiplikand (durch Addition) entstehen lassen, wie eine andre gegebene Zahl, der Multiplikator, (durch Addition) aus 1 entstanden ist. Die durch Multiplikation gebildete Zahl heißt Produkt. Ein Produkt ist demnach eine Zahl, welche so aus dem Multiplikanden entstanden ist, wie der Multiplikator aus 1. Das Multiplikationszeichen ist $\times$ oder $.$; unbestimmte Zahlen werden auch unmittelbar neben einander geschrieben; der Multiplikand steht vor, der Multiplikator nach. So ist 5×3 oder $5 . 3$ das Produkt aus dem Multiplikanden 5 und dem Multiplikator 3, d. h. $a \times b$ oder $a . b$ oder ab das Produkt aus dem Multiplikanden a und dem Multiplikator b d. h. $a \times b$.

§. 12. In einem Produkte ist es gleichgültig, welche der beiden Zahlen als Multiplikand, welche als Multiplikator betrachtet wird.

Beweis. Die Zahl $5 . 3$ ist eine Zahl, welche so aus 5 entstanden ist, wie 3 aus 1. Es ist aber

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$\text{demnach } 5 . 3 = 5 + 5 + 5$$

Geht man weiter darauf ein, wie 5 aus 1 entsteht, so ist

$$5 . 3 = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \end{array} \right\} = 3$$

d. h. $5 . 3$ ist auch eine Zahl, welche so aus 3 entsteht wie 5 aus 1 d. h. $5 . 3 = 3 . 5$. Derselbe Schluß gilt offenbar für alle andern Zahlenwerthe.

Multiplikand und Multiplikator haben den gemeinsamen Namen: **Faktoren**.

Die Erklärung der Multiplikation läßt sich demnach auch so aussprechen:

Multiplizieren heißt eine Zahl so aus dem einen Faktor entstehen lassen, wie der andere Faktor aus 1 entstanden ist.

§. 13. Wenn beliebig viele Zahlen durch Multiplikation zu verbinden sind, so ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge es geschieht.

Nach der Erklärung der Multiplikation können nur 2 Zahlen mit einander multiplicirt werden; dieses Produkt kann aber mit einer 3ten Zahl multiplicirt werden, die selbst ein Produkt ist, u. s. w. In solcher Weise können beliebig viele Zahlen durch Multiplikation mit einander verbunden werden, und für solche Verbindungen gilt der obige Satz aus folgenden Gründen:

c. (ab) ist eine Zahl, welche so aus c entstanden ist, wie ab aus 1; ab entsteht aus 1, indem man zunächst a aus 1 entstehen läßt, und aus der so gebildeten Zahl eine neue Zahl so entstehen läßt, wie b aus 1. Man erhält mithin c (ab), wenn man eine Zahl so aus c entstehen läßt, wie a aus 1, und aus der so gebildeten Zahl eine neue Zahl so entstehen läßt, wie b aus 1 entstanden ist, also wenn man c mit a multiplicirt und das Produkt mit b multiplicirt, demnach ist $c(ab) = (ca)b$.

Aus dem vorigen Paragraph und diesem ergibt sich also $(ab)c = c(ab) = (ba)c = c(ba) = (ca)b = b(ca) = (ac)b = b(ac) = (bc)a = a(bc) = (cb)a = a(cb) = abc$. Dasselbe ergibt sich hiernach leicht für 4 oder mehr Zahlen.

Es ist demnach z. B.

$$(3a) \cdot (5b) = (3 \cdot 5)(a \cdot b)$$

$$(7 \cdot 10)(4 \cdot 100) = (7 \cdot 4)(10 \cdot 100)$$

§. 14. Erklärung und Folgerungen. Nach §. 13 kann jedes Produkt mehrerer Faktoren auf mehrfache Weise als ein Produkt zweier Faktoren werden. Wird in einem solchen Produkt ein Faktor vorzugsweise ins Auge gefaßt, so heißt er: **Hauptgröße**, der andere: **Coefficient**.

In den nächsten Capiteln, wo es vorzugsweise auf Entwicklung und Einübung der Rechnungsgesetze für unbestimmte Zahlen ankommt, werden in Produkten aus bestimmten und unbestimmten Zahlen gewöhnlich die unbestimmten als Hauptgrößen, die bestimmten als Coefficienten betrachtet; daher die Regel:

Man multiplicirt die Coefficienten und schreibt die Hauptgrößen in alphabetischer Ordnung daneben, z. B.

$$2a \cdot 3b = 2 \cdot 3 \cdot ab = 6ab$$

$$3kl \cdot 4km = 3 \cdot 4 \cdot kk \cdot lm = 12kklm.$$

Ein Produkt gleicher Faktoren schreibt man abkürzend, indem man den Faktor nur einmal hinschreibt, und die Anzahl der gleichen Faktoren rechts darüber setzt; man nennt es **Potenz**. Z. B. $kkk = k^3$; man spricht dies aus: „k in der dritten“ (Potenz).

Eine dekadische Zahl ist nach §. 1 eine Summe; die einzelnen Glieder sind Produkte der Ziffernwerthe und der Einheiten oder Stellenwerthe; in ihnen werden naturgemäß die Stellenwerthe als die Hauptgrößen, die Ziffernwerthe als die Coefficienten betrachtet. Demnach läßt sich eine dekadische Zahl folgendermaßen erklären:

Eine dekadische Zahl ist eine mehrgliedrige Größe, deren Hauptgrößen Eins, Zehn oder Potenzen von Zehn sind, deren Coefficienten ganze Zahlen kleiner als Zehn sind.

§. 15. Das Produkt einer eingliedrigen Zahl mit einer mehrgliedrigen läßt sich in Form einer mehrgliedrigen Zahl darstellen.

Nämlich $d(a + b + c)$ ist eine Zahl, so aus d entstanden, wie $a + b + c$ aus 1 entstanden ist. $a + b + c$ entsteht aus 1, indem man erst a , dann b , dann c aus 1 entstehen läßt, und die so gebildeten Zahlen addirt; demnach entsteht $d(a + b + c)$, wenn man eine Zahl so aus d entstehen läßt, wie a aus 1; dann eine Zahl so aus d entstehen läßt, wie b aus 1; dann eine Zahl so aus d entstehen läßt, wie c aus 1 entstanden ist, und die so gebildeten Zahlen addirt; d. h. indem man d mit a , dann d mit b , dann d mit c multiplicirt und die Produkte addirt. Symbolisch:

$$(a + b + c) d = ad + bd + cd$$

Daher der Satz:

Ein Produkt einer mehrgliedrigen Größe mit einer eingliedrigen ist gleich einer Summe von Produkten, in welchen jedesmal 1 Glied der mehrgliedrigen Größe der eine Faktor, die eingliedrige Größe der andere Faktor ist.

In Form einer Rechnungsregel für Multiplikation:

Man multiplicirt eine eingliedrige Größe mit einer mehrgliedrigen, indem man den eingliedrigen Faktor mit jedem Gliede des mehrgliedrigen multiplicirt und die Produkte addirt.

Wenn man von der Form rechts zu der links in obiger Gleichung übergeht, so nimmt der Satz auch folgende Form an:

Jede Summe von Produkten, welche einen Faktor gemeinschaftlich haben, läßt sich in Form eines Produktes darstellen, dessen einer Faktor der gemeinschaftliche Faktor der Glieder, dessen anderer Faktor die Summe der nicht gemeinschaftlichen Faktoren ist.

Betrachtet man den gemeinschaftlichen Faktor als Hauptgröße, und nennt man solche Produkte, welche gleiche Hauptgrößen haben, gleichnamig, so kann man den Satz auch in Form einer Rechnungsregel für Addition folgendermaßen aussprechen:

Man addirt gleichnamige Größen, indem man die Coefficienten addirt und der Summe die gemeinsame Hauptgröße giebt.

Ebenso hat man

$$(a - b) c = ac - bc$$

§. 16. In gleicher Weise läßt sich das Produkt zweier mehrgliedrigen Größen in Form einer mehrgliedrigen Größe darstellen. Symbolisch:

$$(a + b + c)(d + e) = ad + bd + cd + ae + be + ce$$

Wörtlich:

Jedes Produkt zweier mehrgliedrigen Größen ist gleich einer Summe von Produkten, welche man erhält, indem man jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des andern Faktors multiplicirt.

Oder als Multiplikationsregel:

Man multiplicirt zwei mehrgliedrige Größen, indem man jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des andern Faktors multiplicirt und die Produkte addirt.

§. 17. Die Multiplikation dekadischer Zahlen hat die Aufgabe, das Produkt in Form einer dekadischen Zahl darzustellen.

a. Die Multiplikation einziffriger Zahlen wird durch Addition ausgeführt. Die so dargestellten Produkte sind tabellarisch zusammengestellt im Einmaleins.

b. Das Produkt zweier Einheiten des dekadischen Systems ist wieder eine solche Einheit, wie sich aus der Erklärung desselben ergibt. Ist die Anzahl der Nullen, mit welchen die eine Einheit geschrieben wird, $= a$, die der andern b , so ist die Anzahl der Nullen des Produktes $= a + b$.

c. Aus §. 13–15 und aus b ergibt sich für die Multiplikation einer mehrziffrigen dekadischen Zahl mit einer einziffrigen die Regel:

Man multiplicirt den einziffrigen Faktor mit jedem Ziffernwerthe des mehrziffrigen und addirt die Produkte mit Rücksicht auf ihre Stellenwerthe.

d. Aus denselben Gründen in Verbindung mit §. 16 ergibt sich die Regel:

Man multiplicirt eine mehrziffrige dekadische Zahl mit einer mehrziffrigen, indem man jeden Ziffernwerth des einen Faktors mit jedem Ziffernwerthe des andern Faktors multiplicirt, den Produkten die Produkte ihrer Stellenwerthe als Stellenwerth beilegt, und sie mit Rücksicht auf dieselben addirt. — Uebersichtliche und möglichst bequeme Anordnung der Produkte mit Hülfe von Reductionen.

4. Division.

§. 18. Erklärung. Dividiren heißt eine Zahl suchen, welche mit einer gegebenen Zahl, dem Divisor, multiplicirt, eine andre gegebene Zahl, den Dividend, giebt. Die gesuchte Zahl heißt Quotient. Der Quotient ist demnach eine Zahl, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividend giebt. Das Divisionszeichen ist $:$, so daß der Dividend davor, der Divisor dahinter zu stehen kommt; oder $-$, so daß der Dividend darüber, der Divisor darunter geschrieben wird. So ist $15 : 3$ oder $\frac{15}{3}$ der Quotient aus

dem Dividenden 15 und dem Divisor 3 d. h. ? ferner $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ der Quotient aus dem Dividenden a und dem Divisor b d. h. ?

Ein Quotient, welcher dargestellt ist durch Dividend und Divisor, heißt auch Bruch, der Dividend Zähler, der Divisor Nenner. Ein Bruch ist demnach eine Zahl, welche mit dem Nenner multiplicirt den Zähler giebt.

Es leuchtet ein, daß das Dividiren nichts Anderes ist, als ein Messen der Zahlen, der Divisor die Einheit, nach welcher der Dividend gemessen wird; der Quotient die Maßzahl.

Der Quotient ist entweder eine ganze oder eine gebrochene Zahl. Die Betrachtung der allgemeinen Gesetze für Quotienten ist die Aufgabe der Bruchlehre. Hier werden deshalb nur einige wenige Gesetze entwickelt, unter der beschränkenden Bedingung, daß der Quotient eine ganze Zahl sei, damit die Gesetze der Division dekadischer Zahlen genügend begründet werden können; und dann einige Eigenschaften, welche den ganzen Zahlen als solchen zukommen unter der Ueberschrift: Vom Maße der Zahlen, entwickelt.

§. 19. Der Quotient $\frac{ab}{c}$, dessen Dividend ein Produkt ist, läßt sich auch in der Form $\frac{a}{c} \cdot b$, oder in der Form $\frac{b}{c} \cdot a$ darstellen, vorausgesetzt daß $\frac{a}{c}$ oder $\frac{b}{c}$ eine ganze Zahl ist.

Denn $\frac{ab}{c}$ ist eine Zahl, welche mit c multiplicirt ab giebt; dieselbe Zahl ist aber auch $\frac{a}{c} \cdot b$ wenn $\frac{a}{c}$ eine ganze Zahl ist, denn $\left(\frac{a}{c} \cdot b\right) c$ ist unter dieser Voraussetzung $= \left(\frac{a}{c} \cdot c\right) \cdot b = ab$.

Ebenso für $\frac{b}{c} \cdot a$

Ebenso $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$; $\frac{abcd}{efg} = a \cdot \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{d}{g}$ u. s. w.

vorausgesetzt, daß die einzelnen Quotienten, welche als Faktoren auftreten, ganze Zahlen sind. Diese Voraussetzung ist zunächst noch festzuhalten, da der Satz auf §. 13 und somit auf §. 12 beruht, welcher zunächst noch an die Bedingung geknüpft ist, daß die Faktoren ganze Zahlen sind.

§. 20. Der Quotient $\frac{a+b+c}{d}$, dessen Dividend eine Summe ist, läßt sich in Form einer Summe darstellen, nämlich in der Form $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$ wenn $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$ ganze Zahlen sind.

Denn $\frac{a + b + c}{d}$ ist eine Zahl, welche mit d multiplicirt $a + b + c$ giebt. Nach §. 15 und §. 18 ist aber auch

$$\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}\right) d = a + b + c$$

$$\text{Ebenso ist } \frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

§. 21. Die Division dekadischer Zahlen hat die Aufgabe, den Quotienten in Form einer dekadischen Zahl darzustellen. Die Lösung dieser Aufgabe ist zunächst nur dann möglich, wenn der Quotient eine ganze Zahl ist. Das Verfahren besteht darin, daß der Dividend in Summanden zerlegt wird, deren Coefficienten durch den Divisor dividirt ganze Zahlen zu Quotienten geben, welche kleiner als 10 sind. Man beginnt zu dem Ende mit der höchsten Stelle des Dividenden; ist deren Coefficient (Ziffernwerth) kleiner als der Divisor, so reducirt man denselben auf die nächst niedere Stelle, und fährt so fort, bis man zuerst an eine Stelle kommt, deren Coefficient nicht kleiner ist als der Divisor; man sucht darauf die größte ganze Zahl, deren Produkt mit dem Divisor nicht größer als der betreffende Coefficient im Dividenden ist. Dieses Produkt mit dem entsprechenden Stellenwerth aus dem Dividenden ist das erste Glied des Dividenden, und jene größte ganze Zahl mit demselben Stellenwerth ist das erste Glied des Quotienten. Das Produkt subtrahirt man vom Dividenden, und reducirt den Rest auf die nächstniedere Stelle, und fährt so fort; dadurch rückt man gleichzeitig im Dividend und Quotient immer um eine Stelle fort. Geht die Division bei der Einerstelle auf, so ist der Quotient vollständig gefunden; er ist eine ganze Zahl.

Beispiel und Schema:

769824	324
648	2376
1218	
972	
2462	
2268	
1944	
1944	

Der Dividend ist hier durch das oben beschriebene Verfahren zerlegt in die Summanden:

$$648 \cdot 1000 + 972 \cdot 100 + 2268 \cdot 10 + 1944 \cdot 1$$

Es ist aber nach §. 19 und 20

$$648 \cdot 1000 + 972 \cdot 100 + 2268 \cdot 10 + 1944 \cdot 1 =$$

$$324$$

$$\frac{648}{324} \cdot 1000 + \frac{972}{324} \cdot 100 + \frac{2268}{324} \cdot 10 + \frac{1944}{324} \cdot 1 =$$

$$2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 2376$$

Bleibt dagegen bei der Einerstelle noch ein Rest, welcher natürlich kleiner als der Divisor ist, so erkennt man daraus, daß der Quotient zwischen der bis dahin gefundenen Zahl und der um 1 größern liegt, daß er also eine gebrochene Zahl ist. Man nennt sehr häufig die größte ganze Zahl, welche im Quotienten enthalten ist, auch Quotient; sie soll hier den Namen: Ganzer Quotient führen, im Gegensatz zum vollständigen Quotienten.

Bezeichnet man den Dividenden mit a , den Divisor mit b , den ganzen Quotienten mit q , den Rest mit r , so ergibt sich, daß die Abhängigkeit zwischen a , b , q und r durch die Gleichung $a - bq = r$ oder, was dasselbe sagt, durch $a = bq + r$ (§. 8) dargestellt ist. In Worten?

Vom Maaße der Zahlen. *)

§. 22. Erklärung. Man nennt eine Zahl ein Maaß einer andern, wenn sie in dieselbe dividirt zum vollständigen Quotienten eine ganze Zahl giebt.

Man nennt eine Zahl einen Dividuus einer andern, wenn sie durch dieselbe dividirt zum vollständigen Quotienten eine ganze Zahl giebt.

Maaß und Dividuus sind korrelative Begriffe; 7 ist ein Maaß von 42 und 42 ist ein Dividuus von 7; d. h.?

Jede Zahl hat 1 und sich selbst zum Maaße; diejenigen Zahlen, welche nur 1 und sich selbst zum Maaße haben, heißen Primzahlen.

Jede 2 Zahlen haben 1 zum gemeinschaftlichen Maaße; 2 solche Zahlen, welche nur 1 zum gemeinschaftlichen Maaße haben, heißen relative Primzahlen.

Jede Zahl hat unzählig viele Dividuen, welche man erhält, wenn man die Zahl mit der Reihe der Zahlen von 1 anfangend multiplicirt. an ist die allgemeine Form eines Dividuus von a . — $2n$ ist die allgemeine Form einer geraden Zahl.

§ 23. Fundamentalsätze.

1. Jedes gemeinschaftliche Maaß zweier Zahlen ist auch ein Maaß ihrer Summe und ihrer Differenz.

Wenn c ein gemeinschaftliches Maaß von a und b ist (d. h. ?) so ist c auch ein Maaß von $a + b$ und von $a - b$ (d. h. ?)

denn $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$ (§ 20).

Der zweite der hierin enthaltenen Sätze läßt sich auch so aussprechen: Jedes gemeinschaftliche Maaß der Summe zweier Zahlen und des einen Summanden ist auch ein Maaß des andern Summanden.

*) Unter dem Worte „Zahl“ wird fortwährend eine ganze Zahl verstanden.

2. Jedes Maaf einer Zahl ist auch ein Maaf jedes Dividens dieser Zahl.

Beweis nach §. 19.

Wie läßt sich dieser Satz in mehrfach verschiedener Weise in Worten aussprechen?

§. 24. Hauptsatz.

1. Jedes gemeinschaftliche Maaf von Dividend und Divisor ist auch ein Maaf des Restes.

Es seien a und b irgend 2 Zahlen, a der Dividend, b der Divisor, q der ganze Quotient, r der Rest und m irgend ein gemeinsames Maaf von a und b . Nach §. 21 ist $a = bq + r$ ferner m nach §. 23. 2 ein Maaf von bq folglich nach §. 23. 1 ein Maaf von r .

2. Jedes gemeinschaftliche Maaf von Divisor und Rest ist auch ein Maaf des Dividenden.

Es seien a und b irgend 2 Zahlen, a der Dividend, b der Divisor, q der ganze Quotient, r der Rest, und m ein gemeinschaftliches Maaf von b und r . Nach §. 21 ist $a = bq + r$ ferner m nach §. 23. 2 ein Maaf von bq , folglich nach §. 23. 1 ein Maaf von a .

Die beiden Sätze lassen sich in folgender Form aussprechen:

1. Jedes gemeinschaftliche Maaf von Dividend und Divisor ist auch ein gemeinschaftliches Maaf von Divisor und Rest.

2. Jedes gemeinschaftliche Maaf von Divisor und Rest ist auch ein gemeinschaftliches Maaf von Dividend und Divisor.

In dieser Form sind die Sätze Umkehrungen von einander, und lassen sich also in einem Satze vereinigt aussprechen:

3. Die gemeinschaftlichen Maaße von Dividend und Divisor sind dieselben wie die von Divisor und Rest.

§. 25. Nach §. 24. 3 lassen sich die gemeinschaftlichen Maaße zweier Zahlen auf die zweier kleineren Zahlen zurückführen, und so fort bis auf die Maaße einer Zahl. Z. B. die gemeinschaftlichen Maaße von 32 und 12 sind dieselben, wie die von 12 und 8, mithin dieselben wie die von 8 und 4, mithin dieselben, wie die Maaße von 4. Man hat dadurch Anleitung zur Auflösung der Aufgabe:

Die gemeinschaftlichen Maaße zweier Zahlen zu finden.

Diese Aufgabe führt sich dadurch, daß das größte Maaf einer Zahl die Zahl selbst ist, daß also die gemeinschaftlichen Maaße zweier Zahlen dieselben sind, wie die Maaße ihres größten gemeinschaftlichen Maaßes auf die Aufgabe zurück:

Das größte gemeinschaftliche Maaf zweier Zahlen zu finden.

Regel. Man dividire die kleinere Zahl in die größere, den

Rest in den vorhergehenden Divisor, und fahre so fort, bis die Division aufgeht; dann ist der letzte Divisor das größte gemeinschaftliche Maaß.

Beispiel und Schema:

649	451	1
451	396	2
198	55	3
165	33	1
33	22	1
22	22	2
11		

11 ist das größte gemeinschaftliche Maaß von 649 und 451.

Anm. Bei kleineren Zahlen, welche man im Kopfe in Form von Produkten darstellen, in Faktoren zerlegen kann, kann man das größte gemeinschaftliche Maaß auf kürzerem Wege finden.

§. 26. Aufgabe. Die gemeinschaftlichen Maaße mehrerer Zahlen zu finden.

Aus §. 25 ergibt sich:

1) Man findet das größte gemeinschaftliche Maaß mehrerer Zahlen, indem man es von 2 der Zahlen sucht, dann von dem gefundenen Maaß und einer 3ten, und so fortfährt bis alle Zahlen an der Reihe gewesen sind. Das letztgefundene ist das größte gemeinschaftliche Maaß aller Zahlen

und

2) die gemeinschaftlichen Maaße mehrerer Zahlen sind dieselben, wie die Maaße ihres größten gemeinschaftlichen Maaßes.

§. 27. Von gemeinschaftlichen Dividuen zweier Zahlen.

1. Man findet einen gemeinschaftlichen Dividuus zweier Zahlen, indem man sie mit einander multiplicirt.— ab ist ein gemeinschaftlicher Dividuus von a und b .

2. Man findet daraus unzählig viele neue, indem man das Produkt mit beliebigen Zahlen multiplicirt (§. 23. 2).

3. An einzelnen Beispielen erkennt man, daß häufig auch durch Division sich ein neuer und mithin kleinerer gemeinschaftlicher Dividuus finden läßt; z. B. $6 \cdot 15 = 90$ ist ein gemeinschaftlicher Dividuus von 6 und 15; aber auch $\frac{90}{3} = 30$ ist ein solcher.

Es fragt sich also: Wann ist $\frac{ab}{f}$ ein gemeinschaftlicher Dividuus von a und b ?

Zunächst ist klar, daß f ein Maaß von ab sein muß, damit $\frac{ab}{f}$ eine ganze Zahl sei.

Ferner muß $\frac{ab}{f}$ ein Dividuus von a sein, d. h. $\frac{ab}{f} : a$ muß

eine ganze Zahl sein, d. h. $\frac{b}{f}$ muß eine ganze Zahl sein, oder f muß ein Maas von b sein. Ebenso muß f ein Maas von a sein, damit $\frac{ab}{f}$ ein Dividuus von b sei. Nothwendige und genügende

Bedingung dafür, daß $\frac{ab}{f}$ ein gemeinschaftlicher Dividuus von a und b sei, ist demnach, daß f ein gemeinschaftliches Maas von a und b ist. In Worten:

Man erhält einen gemeinschaftlichen Dividuus zweier Zahlen, wenn man ihr Produkt durch ein gemeinschaftliches Maas der beiden Zahlen dividirt; man erhält keinen gemeinschaftlichen Dividuus, wenn man das Produkt durch irgend eine andre Zahl dividirt.

4. Den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus, den man durch Division aus dem Produkte erhalten kann, erhält man, wenn man durch das größte gemeinschaftliche Maas dividirt. Dieser Quotient ist auch der kleinste gemeinschaftliche Dividuus, der überhaupt existirt, denn es läßt sich zeigen, daß der kleinste gemeinschaftliche Dividuus zweier Zahlen sich aus ihrem Produkte durch Division erhalten läßt; d. h. daß der kleinste gemeinschaftliche Dividuus zweier Zahlen ein Maas ihres Produktes ist. Es läßt sich nämlich zeigen, daß der kleinste gemeinschaftliche Dividuus zweier Zahlen ein Maas jedes gemeinschaftlichen Dividuus derselben Zahlen ist.

Es seien nämlich a und b irgend 2 Zahlen, d ihr kleinster gemeinschaftlicher Dividuus, D irgend ein gemeinschaftlicher Dividuus. Um zu untersuchen, ob d ein Maas von D ist, dividirt man D durch d ; der ganze Quotient sei q , und wenn ein Rest existirt, so sei er r . Dann ist nach §. 24 r ein gemeinschaftlicher Dividuus von a und b ; r muß aber auch kleiner als d sein; darin liegt ein Widerspruch, welcher beweist, daß kein Rest existiren kann.

5. Aus 4 folgt in Verbindung mit §. 23 2

Die gemeinschaftlichen Dividuen zweier Zahlen sind dieselben wie die Dividuen ihres kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus.

6. Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus zweier Zahlen ist gleich ihrem Produkte, dividirt durch ihr größtes gemeinschaftliches Maas.

Nach §. 19 ergibt sich hieraus die Rechnungsregel: Man findet den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus zweier Zahlen, indem man ihr größtes gemeinschaftliches Maas sucht, dasselbe in eine der beiden Zahlen dividirt und den Quotienten mit der andern Zahl multiplicirt.

§. 28. Den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus mehrerer Zahlen findet man vermöge §. 27 5, indem man den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus von 2 der Zahlen sucht, dann von dem gefundenen Dividuus und einer dritten Zahl, und so fort, bis alle Zahlen an der Reihe gewesen sind.

Zugleich hat man den Satz: Die gemeinschaftlichen Dividuen mehrerer Zahlen sind dieselben, wie die Dividuen ihres kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus.

§. 29. Jedes Maaß eines Productes, welches relativ Primzahl zu dem einen Factor ist, ist ein Maaß des andern Factors.

Es sei m ein Maaß von ab und relative Primzahl zu a , so ist m ein Maaß von b .

Beweis. Da m relative Primzahl zu a ist, so wird, wenn man m in a dividirt, den Rest in den vorhergehenden Divisor, und so fortfährt, bis die Division aufgeht, der letzte Divisor $= 1$ sein. Die Bedingung also, daß m relative Primzahl zu a ist, wird ausgesprochen durch folgende zusammenhängende Gleichungen:

$$a = mq + r$$

$$m = rq' + r'$$

$$r = r'q'' + r''$$

$$\vdots$$

$$\begin{matrix} (n-1) & (n) & (n+1) \\ r & = r & q + 1 \end{matrix}$$

Multiplieirt man alle diese Gleichungen mit b , so erhält man

$$ab = mbq + rb$$

$$mb = rbq' + r'b$$

$$rb = r'bq'' + r''b$$

$$\vdots$$

$$\begin{matrix} (n-1) & (n) & (n+1) \\ r & b = r & bq + b \end{matrix}$$

Da m ein Maaß von ab ist, so ist es nach der ersten Gleichung ein Maaß von $mbq + rb$; da m ferner ein Maaß von mbq ist, so ist es ein Maaß von rb . Setzt man diese Schlussfolgerung durch die folgenden Gleichungen fort, so kommt man durch die letzte zu dem Schlusse: m ist ein Maaß von b .

Anm. Dieser Satz findet seine erste Anwendung in §. 51 und §. 53, kann also, wenn es sonst angemessen scheint, im Unterrichte bis dahin verschoben werden.

Zweites Capitel.

Die Grundrechnungsarten in Brüchen.

§. 30. Erklärung des Bruches. S. §. 18. Ein Quotient wird vorzugsweise dann in Bruchform dargestellt, wenn er keine ganze Zahl, sondern eine gebrochene Zahl ist. Die Summe einer ganzen Zahl und eines Bruches wird, wenn sie durch ihre Summanden dargestellt ist, gemischte Zahl genannt. So sind

$$a + \frac{b}{c}; \quad 3 + \frac{4}{5} = 3 \frac{4}{5} \text{ gemischte Zahlen.}$$

§. 31. Eintheilung der Brüche.

1. Rücksichtlich ihres Werthes in ächte und unächte. Ein ächter Bruch ist ein solcher, dessen Zähler kleiner ist, als der Nenner, dessen Werth also kleiner ist als 1. Z. B. $\frac{4}{5}$, $\frac{2\frac{1}{2}}{7}$. Ein unächter Bruch ist ein solcher, dessen Zähler größer ist, als der Nenner, oder gleich dem Nenner, dessen Werth also größer als 1

oder = 1 ist. Z. B. $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{\frac{3}{4}}$.

2. Rücksichtlich ihrer Form in einfache und Doppelbrüche. Ein einfacher Bruch ist ein solcher, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind. Z. B. $\frac{3}{8}$, $\frac{a}{b}$

Ein Doppelbruch ist ein solcher, in welchem dies nicht der Fall ist. Z. B. $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{a}{b}}$, $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$, $\frac{a + \frac{b}{c}}{d}$, $\frac{1\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$, $\frac{a + \frac{b}{c}}{d + \frac{e}{f}}$

$$\frac{\frac{7}{1}}{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{c + \frac{d}{e}}$$

Zunächst kommen nur einfache Brüche in Betracht.

§. 32. Mehrere Sätze des vorigen Capitels über Zahlenverbindungen wurden an die Bedingung geknüpft, daß die darin vorkommenden Zahlen ganze Zahlen seien. Diese Bedingung war aber nur in der Art der Ableitung, nicht in dem Wesen der Sätze begründet; sie sind davon unabhängig. Es sind die §§. 12, 13, 15, 16, 19, 20.

1. In dem Produkte einer ganzen Zahl und eines Bruches ist es gleichgültig, welche der beiden Zahlen als Multiplikand, welche als Multiplikator betrachtet wird. (Vergl. §. 12.)

Denn I. $\frac{a}{b} \cdot c$ ist eine Zahl, welche so aus $\frac{a}{b}$ entsteht, wie c aus 1; d. h. da c eine ganze Zahl ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots$$

wo die Anzahl der gleichen Summanden $= c$ ist. Diese Summe kann aber offenbar in Form eines Bruches dargestellt werden; denn da nach §. 18 ein Bruch nichts Anderes ist, als eine Maaszahl, in welcher der Nenner die messende Einheit, der Zähler die gemessene Größe ist; da ferner die Summe der Maaszahlen mehrerer Größen, welche nach derselben Einheit gemessen sind, gleich der Maaszahl der Summe dieser Größen ist, wenn sie wieder nach derselben Einheit gemessen wird, so ist offenbar

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots = \frac{ac}{b}$$

II. $c \cdot \frac{a}{b}$ ist eine Zahl, welche so aus c entsteht, wie $\frac{a}{b}$ aus 1. $\frac{a}{b}$ entsteht (durch Addition) aus 1, indem zunächst a aus 1 entsteht, und dann eine Zahl gebildet wird, welche b Mal als Summand gesetzt die zuvor gebildete Zahl giebt. Demnach wird $c \cdot \frac{a}{b}$ gebildet, indem man c mit a multiplicirt und das Produkt durch b dividirt, folglich $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}$

Da nun $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$ und $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{b}$; da ferner $ac = ca$

(nach §. 12.), so ist $\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b}$

2. Wenn beliebig viele Zahlen durch Multiplikation verbunden werden sollen, so ist es auch dann gleichgültig in welcher Reihenfolge dies geschieht, wenn unter den Faktoren ein Bruch ist (Vgl. §. 13.)

Die Ableitung des §. 13 ist nur in so fern an die Bedingung gebunden, daß die Faktoren ganze Zahlen sind, als er auf §. 12 beruht; jede Erweiterung des §. 12 hat mithin die entsprechende Erweiterung des §. 13 zur Folge.

3. Der Quotient $\frac{ab}{c}$ läßt sich auch dann in Form des Productes $\frac{a}{c} \cdot b$, oder $\frac{b}{c} \cdot a$ darstellen, wenn $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ nicht ganze Zahlen sind (Vgl. §. 19.) — Folgt aus §. 19 so wie 2 aus §. 13; ist auch schon in 1 enthalten.

$$4. \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b = \frac{a}{bc}$$

denn bezeichnet man den Quotient $\frac{a}{bc}$ mit p , so ist nach § 18

$$a = p (bc) = (pb) c \quad \left. \begin{array}{l} = (pc) b \end{array} \right\} \text{ nach 2}$$

$$pb = \frac{a}{c}; \quad pc = \frac{a}{b} \text{ nach §. 18}$$

$$p = \frac{a}{c} : b = \frac{a}{b} : c \text{ nach §. 18.}$$

5. In dem Producte zweier Brüche ist es gleichgültig, welcher der beiden Brüche als Multiplikand, welcher als Multiplikator betrachtet wird. (Vgl. §. 12 und 1.)

Folgt aus 1 und 4.

6. Wenn beliebig viele Zahlen durch Multiplikation zu verbinden sind, so ist es auch dann gleichgültig, in welcher Reihenfolge es geschieht, wenn beliebig viele derselben Brüche sind (Vgl. §. 13 und 2).

7. Die Erweiterung der Sätze §. 15. 16. 20 ergibt sich hieraus von selbst. Auf dem so erweiterten §. 20 beruht insbesondere die Darstellung eines unächten Bruches in Form einer gemischten Zahl.

Es ist noch zu erwähnen, daß vermöge der Ableitung in den hier ausgesprochenen Sätzen die Zahlzeichen $a, b, c \dots$ ganze Zahlen bezeichnen.

1. Umformung der Brüche ohne Werthänderung.

§. 33. Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt.

$$1, \quad \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

denn $\frac{a}{b} (bc) = \left(\frac{a}{b} \cdot b \right) c = ac$. In Worten?

$$2, \quad \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$$

denn $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \left(b \cdot \frac{1}{c} \right) = \left(\frac{a}{b} \cdot b \right) \frac{1}{c} = \frac{a}{c}$

In Worten?

§. 34. Die Division des Zählers und Nenners durch dieselbe Zahl wird angewandt in der Aufhebung der Brüche.

Einen Bruch aufheben heißt: Zähler und Nenner durch ein gemeinschaftliches Maass dividiren. Der Zweck des Aufhebens ist, den Bruch in einfacherer Form darzustellen; am vollständigsten wird dieser Zweck erreicht, wenn Zähler und Nenner durch ihr größtes gemeinschaftliches Maass dividirt werden. Nach solcher Aufhebung werden Zähler und Nenner relative Primzahlen. Wenn Zähler und Nenner eines Bruches relative Primzahlen sind, so nennt man den Bruch irreductibel.

§. 35. Vermöge §. 33 kann man jeden Bruch in einen andern einfachen verwandeln, dessen Nenner irgend ein Dividuus des gegebenen Nenners ist. Um den Zähler des neuen Bruches zu finden, dividirt man den gegebenen Nenner in den neuen Nenner, und multiplicirt den Quotienten mit dem Zähler.

Hiernach kann man mehrere Brüche mit ungleichen Nennern so umwandeln, daß sie gleiche Nenner haben.

Brüche, welche gleiche Nenner haben, heißen gleichnamig; welche ungleiche Nenner haben, ungleichnamig.

Man macht ungleichnamige Brüche gleichnamig, indem man jeden der Brüche in einen andern verwandelt, dessen Nenner irgend ein beliebiger, für alle gleicher, gemeinschaftlicher Dividuus der Nenner ist. Am zweckmäßigsten wählt man den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus, und nennt ihn den Hauptnenner oder Generalnenner.

Die Regel für Gleichnamigmachung der Brüche heißt demnach:

Man sucht den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus der Nenner, dividirt jeden Nenner hinein, multiplicirt die Quotienten mit den entsprechenden Zählern, und dividirt die Produkte durch den Hauptnenner.

2. Addition der Brüche.

§. 36. Die Addition der Brüche hat die Aufgabe, die Summe der Brüche in Form eines Bruches (zuweilen auch einer gemischten Zahl) darzustellen.

Gleichnamige Brüche addirt man, indem man die Zähler addirt, und der Summe den gemeinschaftlichen Nenner giebt.

Folgt aus derselben Betrachtung, wie §. 32. 1. I, oder auch aus §. 20 in der Erweiterung des §. 32.

Ungleichnamige Brüche addirt man, indem man sie gleichnamig macht.

In den vorigen Sätzen sind auch die Regeln für Addition von Brüchen und ganzen Zahlen enthalten, indem jede ganze Zahl sich als ein Bruch betrachten läßt, dessen Nenner 1 ist. Diese Umformungen kommen aber in der Anwendung so häufig vor, daß man gewöhnlich besondere Regeln dafür ausspricht.

Eine gemischte Zahl (§. 30.) in einen Bruch verwandeln nennt man: die gemischte Zahl einrichten. Man führt dies aus, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multiplicirt, zu dem Producte den Zähler addirt, und die Summe durch den Nenner dividirt.

Mehrere ganze Zahlen, Brüche, gemischte Zahlen addirt man, d. h. man stellt deren Summe in Form eines Bruches dar, indem man alle in den Summanden vorkommenden Brüche addirt, die ganzen Zahlen addirt und diese erhaltene gemischte Zahl einrichtet.

Ist bei irgend einer dieser Rechnungen der erhaltene Bruch ein unächter, so kann man ihn nach §. 32. 7 in Form einer gemischten Zahl darstellen.

Ist Darstellung in Form einer gemischten Zahl der Zweck der Addition ganzer Zahlen, gemischter Zahlen und Brüche, so addirt man zunächst die Brüche, stellt den Summenbruch, wenn er ein unächter ist, in Form einer gemischten Zahl dar, und addirt die darin enthaltene ganze Zahl zu den ganzen Zahlen.

3. Subtraction der Brüche.

§. 37. Die Subtraction der Brüche hat die Aufgabe, die Differenz in Form eines Bruches (zuweilen auch einer gemischten Zahl) darzustellen.

Gleichnamige Brüche subtrahirt man, indem man den Zähler des Subtrahenden von dem Zähler des Minuenden subtrahirt, und der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner giebt.

Ungleichnamige Brüche subtrahirt man, indem man sie gleichnamig macht.

In diesen Regeln sind auch die für Subtraction gemischter Zahlen, ganzer Zahlen und Brüche enthalten (§. 36.)

Ist Darstellung in Form einer gemischten Zahl der Zweck der Subtraction eines Bruches von einer ganzen Zahl, so borgt man, wenn der Bruch ein ächter ist, eine 1 von der ganzen Zahl, d. h. reducirt sie auf einen dem Bruche gleichnamigen Bruch, subtrahirt den Subtrahenden von dem Bruche des Minuenden, und addirt zu dieser Differenz den (um 1 verminderten) Minuenden.

Hieraus ergeben sich bei gleichem Zwecke sehr leicht die Regeln für Subtraction eines Bruches von einer gemischten Zahl, einer gemischten Zahl von einer gemischten Zahl, eines unächten Bruches von einer ganzen Zahl, einer ganzen Zahl von einem unächten

Brüche, einer gemischten Zahl von einem unächten Brüche, eines unächten Bruches von einer gemischten Zahl.

4. Multiplikation der Brüche.

§. 38. Die Multiplikation der Brüche hat die Aufgabe, das Produkt in Form eines Bruches darzustellen.

Man multiplicirt einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches multiplicirt, und das Produkt durch den Nenner dividirt. (§. 32. 1.)

Man multiplicirt einen Bruch mit einem Brüche, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt. (§. 32, 5).

Das Produkt zweier Zahlen kann $= 1$ sein; in diesem Falle nennt man die Zahlen umgekehrte Werthe von einander.

Wenn einer der beiden Faktoren, oder beide Summen sind, deren Glieder theilweise oder alle Brüche sind, und man will das Produkt in Form eines Bruches darstellen, so stellt man jede solche Summe zunächst in Form eines Bruches dar.

Wie ein Produkt aus mehreren Faktoren zu behandeln ist, geht aus §. 32, 6 hervor. Insbesondere ist dabei die Regel des §. 14 häufig anzuwenden: Man multiplicirt die Coefficienten unter sich und die Hauptgrößen unter sich, und verbindet die beiden so erhaltenen Zahlen zu einem Produkte.

5. Division der Brüche.

§. 39. Die Division der Brüche hat die Aufgabe, den Quotienten in Form eines Bruches, und zwar eines einfachen Bruches, darzustellen.

Jeder Quotient, also auch der von Brüchen, läßt sich durch Dividend und Divisor mit Hülfe des Bruchstrichs, also in Form eines Bruches darstellen; aber dieser Bruch ist dann ein Doppelbruch. Die Aufgabe der Division der Brüche ist demnach keine andere, als die der Verwandlung der Doppelbrüche in einfache.

Man dividirt einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Zähler des Bruches unverändert läßt, und den Nenner mit der ganzen Zahl multiplicirt. (§. §. 32, 4.)

Die allgemeine Divisionsregel, in welcher auch diese eben gegebene Regel enthalten ist, ergiebt sich am einfachsten aus folgender Bemerkung: Eine Zahl ist dann am einfachsten durch eine andre zu dividiren, wenn der Dividend in Form eines Produktes dargestellt ist, in welchem der Divisor ein Faktor ist; denn der Quotient ist dann der andere Faktor.

Es läßt sich aber jede Zahl in Form eines Produktes darstellen, deren einer Faktor der Divisor ist, wenn man sie nämlich gleichzeitig mit diesem Divisor und seinem umgekehrten Werthe multiplicirt. Demnach:

Der Quotient zweier Zahlen ist immer gleich dem Produkte aus dem Dividenden und dem umgekehrten Werthe des Divisors. Oder:

Man verwandelt jede Division in eine Multiplikation, indem man den Dividend unverändert läßt, den Divisor aber umkehrt. Oder:

Um einen Bruch durch eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl durch einen Bruch, oder einen Bruch durch einen Bruch zu dividiren, kehrt man den Divisor um und multiplicirt.

Wenn der Dividend, oder der Divisor, oder beide Summen sind, deren Glieder theilweise oder alle Brüche sind, und man will den Quotienten in Form eines Bruches darstellen, so stellt man jede solche Summe zunächst in Form eines Bruches dar.

§. 40. Von Doppelbrüchen. Alle Rechnungen mit Doppelbrüchen werden ausgeführt, indem man nach §. 39 die Doppelbrüche in einfache verwandelt.

§. 41. In §. 31—39 ist noch die Beschränkung festgehalten, daß die Zahlzeichen $a, b, c \dots$ nur ganzen Zahlen bezeichnen. Diese Beschränkung muß aufgehoben werden, denn durch sie würde der größte Theil des Nutzens der Einführung unbestimmter Zahlen verloren gehen. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß alle bisherigen Sätze, welche bisher vermöge der Art der Ableitung an diese Beschränkung geknüpft waren, von derselben unabhängig sind.

1. Da es für ein Produkt zweier gebrochenen Zahlen überhaupt gleichgültig ist, welche der beiden Zahlen als Multiplikand, welche als Multiplikator betrachtet wird, so gilt dieser Satz für jede Form, in welcher die Faktoren auftreten; er läßt sich symbolisch darstellen

$$ab = ba$$

wo a und b ganze oder gebrochene Zahlen, Summen oder Produkte, Differenzen oder Quotienten, einfache oder Doppelbrüche sein können. Dies ist der Satz des §. 31, 5.

2. Demnach ist auch der Satz des §. 32, 6 von der dort gestellten Bedingung unabhängig.

3. Demnach ist für alle Werthe von a, b, c

$$\frac{a}{b} \cdot c \text{ oder } c \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$\text{denn } \frac{a}{b} \cdot c = \left(a \cdot \frac{1}{b} \right) c = (ac) \frac{1}{b} = \frac{ac}{b}$$

4. Demnach ist auch für alle Werthe von a, b, c, d

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\text{denn } \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) bd = \left(\frac{a}{b} \cdot b \right) \left(\frac{c}{d} \cdot d \right) = ac$$

5. Hieraus ergibt sich mit Leichtigkeit die Allgemeingültigkeit aller hier in Betracht kommenden Sätze.

Von den Decimalbrüchen.

§. 42. Erklärung. Ein einfacher Bruch, dessen Nenner eine der Einheiten des dekadischen Zahlensystems ist, heißt ein Decimalbruch. Z. B. $\frac{13}{10}$, $\frac{47}{100}$, $\frac{38741}{1000}$, $\frac{17}{10000}$ u. s. w.

Ein solcher Bruch ist vollständig gegeben, wenn sein Zähler und die Anzahl der Nullen seines Nenners gegeben ist. Darauf gründet sich die abkürzende Schreibart der Decimalbrüche: Man schreibt den Zähler hin, und zählt von der Rechten zur Linken so viel Stellen ab, als der Nenner Nullen hat; da setzt man ein Komma; etwa fehlende Stellen ergänzt man durch links vorgesezte Nullen; eine solche setzt man auch links vom Komma, wenn dieses ganz vorn stehen würde. Z. B. $\frac{13}{10} = 1,3$, $\frac{47}{100} = 0,47$;

$$\frac{38741}{1000} = 38,741; \quad \frac{17}{10000} = 0,0017$$

§. 43. Jeder Decimalbruch läßt sich in Form einer Summe von Produkten darstellen, deren Hauptgrößen die Einheiten des dekadischen Systems oder ihre umgekehrten Werthe sind, und deren Coefficienten ganze Zahlen kleiner als 10 sind. Alle diese Hauptgrößen befolgen aber das dekadische Gesetz, denn jede folgende ist 10 mal größer als die vorhergehende, wenn man von der Rechten zur Linken fortschreitet; und die Coefficienten erfüllen ebenfalls die Bedingungen, welchen die Coefficienten der dekadischen Zahlen unterworfen sind.

Jeder Decimalbruch ist demnach eine dekadische Zahl, wenn man die Beschränkung aufhebt, daß die niedrigste Einheit 1 ist. Die Einheiten erhalten auch hier mit Recht den Namen: Stellenwerthe. Die zunächst links vom Komma stehende Stelle ist die Einerstelle. Die rechts vom Komma stehenden Stellen heißen Bruchstellen.

$$\begin{aligned} \text{Z. B. } \frac{38741}{1000} &= \frac{3 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 1}{1000} \\ &= \frac{3 \cdot 10000}{1000} + \frac{8 \cdot 1000}{1000} + \frac{7 \cdot 100}{1000} + \frac{4 \cdot 10}{1000} + \frac{1 \cdot 1}{1000} \\ &= 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 7 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} + 1 \cdot \frac{1}{1000} \\ &= 38,741 \end{aligned}$$

§. 44. Die beiden Auffassungsweisen des Decimalbruchs als Bruch und als dekadische Zahl stehen in der Art neben einander, daß sowohl diese aus jener, als jene aus dieser abgeleitet werden kann. Jeder folgende Satz kann sowohl aus der einen wie aus der andern abgeleitet werden. Folgender einfache Satz diene als Beispiel.

Ein Decimalbruch bleibt unverändert, wenn man rechts eine beliebige Anzahl von Nullen anhängt. Folgt bei der Auffassung

des Decimalbruchs als Bruch daraus, daß der Werth eines Bruchs unverändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt; und bei der Auffassung des Decimalbruchs als defadische Zahl daraus, daß durch Anhängung der Nullen weder irgend ein Zifferwerth, noch irgend ein Stellenwerth verändert wird.

§. 45. Addition der Decimalbrüche. Die Addition der Decimalbrüche (defadischen Zahlen) hat die Aufgabe, die Summe in Form eines Decimalbruchs, (einer defadischen Zahl) darzustellen.

Man addirt Decimalbrüche als defadische Zahlen d. h.? (S. 7.)

§. 46. Subtraction der Decimalbrüche. Die Subtraction der Decimalbrüche (defadischen Zahlen) hat die Aufgabe, die Differenz in Form eines Decimalbruchs (einer defadischen Zahl) darzustellen.

Man subtrahirt Decimalbrüche als defadische Zahlen d. h.? (S. 10.)

§. 47. Multiplication der Decimalbrüche. Die Multiplication der Decimalbrüche (defadischen Zahlen) hat die Aufgabe, das Produkt in Form eines Decimalbruchs (einer defadischen Zahl) darzustellen.

Man multiplicirt Decimalbrüche als Brüche d. h.? (S. 37) daraus ergibt sich für diesen besondern Fall die besondere Regel:

Man multiplicirt die Decimalbrüche ohne Rücksicht auf's Komma (die Zähler), und gibt dem Produkte so viel Bruchstellen, als die beiden Faktoren zusammen genommen Bruchstellen haben (die Nenner).

Wie multiplicirt man einen Decimalbruch mit einer Einheit des defadischen Systems?

§. 48. Division der Decimalbrüche. Die Division der Decimalbrüche (defadischen Zahlen) hat die Aufgabe, den Quotienten in Form eines Decimalbruchs (einer defadischen Zahl) darzustellen.

Man dividirt Decimalbrüche als defadische Zahlen (S. 21). Nur die Bestimmung der Stellenwerthe der Quotientenziffern bedarf einer nähern Auseinandersetzung. Man denkt sich hier wie dort den Divisor ganz auf seinen niedrigsten Stellenwerth reducirt; dann erhält man die Stellenwerthe der Quotientenziffern, indem man die Stellenwerthe der Glieder des Dividenden durch den Stellenwerth des Divisors dividirt. Demnach erhält man die Einerstelle des Quotienten, wenn man in die Stelle des Dividenden dividirt, deren Stellenwerth gleich dem Stellenwerthe des Divisors ist. Die Stellen des Dividenden, deren Stellenwerthe niedriger sind als der Stellenwerth des Divisors, nennt man überschüssige Stellen des Dividenden. Die erste überschüssige Stelle des Dividenden liefert die erste Bruchstelle des Quotienten, die zweite überschüssige Stelle die zweite Bruchstelle. Hieraus ergibt sich die gewöhnliche praktische Regel:

Man dividirt Decimalbrüche ohne Rücksicht auf das Komma, und setzt im Quotienten das Komma, wenn die erste überschüssige Stelle heruntergeholt wird.

Muß beim Anfange der Division sogleich eine Reduktion bis auf die n te überschüssige Stelle statt finden, so schreibt man im Quotienten sogleich n Nullen hin, eine links, $n - 1$ rechts vom Komma, und erst dann die erste bedeutsame Quotientenziffer.

Hat nicht der Dividend, sondern der Divisor überschüssige Stellen, so ergänzt man gewöhnlich die fehlenden Stellen des Dividenden durch Nullen, und setzt das Komma im Quotienten, wenn die erste neue Null angehängt wird.

Wie dividirt man einen Decimalbruch durch eine Einheit des dekadischen Zahlensystems?

Verwandlung der gemeinen Brüche in

Decimalbrüche und umgekehrt.

§. 49. Nachdem die Beschränkung aufgehoben ist, daß die niedrigste Stelle des Quotienten die Einerstelle sein muß, ist die vollständige Auflösung der Aufgabe §. 21 möglich: den Quotienten zweier dekadischen Zahlen in Form einer dekadischen Zahl darzustellen; eine Aufgabe, welche dort nur für ganze Zahlen gestellt wurde, und welche nur dann gelöst wurde, wenn der Divisor ein Maasß des Dividenden war. In §. 48 ist sie vollständig gelöst. Es soll hier nur der Fall weiter verfolgt werden, daß Dividend und Divisor ganze Zahlen sind, mit der besondern Annahme, daß Dividend und Divisor relative Primzahlen sind; eine Annahme, welche der Allgemeinheit gar keinen Eintrag thut. Die Aufgabe ist dann die der Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch. Sie ist durch §. 48 gelöst, es treten aber dabei so wichtige verschiedene Formen auf, daß sie eine nähere Untersuchung verlangen.

§. 50. Eintheilung der Decimalbrüche. Man theilt die Decimalbrüche ein in endliche und unendliche. Die unendlichen Decimalbrüche werden eingetheilt in periodische und unperiodische. Periodische Decimalbrüche sind solche, in welchen eine gewisse Gruppe von Ziffern, die man eine Periode nennt, regelmäßig immer wiederkehrt; unperiodische Decimalbrüche sind solche, bei welchen dies nicht der Fall ist.

Die periodischen Brüche werden eingetheilt in vollständig periodische und unvollständig periodische. Vollständig periodisch heißen sie, wenn die erste Periode mit der ersten Bruchstelle beginnt; unvollständig periodisch, wenn dies nicht der Fall ist. In letzteren heißen diejenigen Bruchstellen, welche vor der ersten Periode stehen, Bruchvorstellen.

§. 51. Der Decimalbruch, welcher aus einem gemeinen Bruche hervorgeht, wird endlich, wenn der Nenner des gemeinen Bruches

keine andere Primzahlen zu Maaßen (zu Faktoren) hat, als 2 und 5; unendlich, wenn er andere Primfaktoren enthält.

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b} \cdot 10}{10} = \frac{\frac{a \cdot 10}{b}}{10}$$

Dieser Bruch hat den Nenner 10, ist aber im Allgemeinen noch kein Decimalbruch, weil sein Zähler im Allgemeinen ein Bruch ist. Ist b relative Primzahl zu 10, so ist $\frac{a \cdot 10}{b}$ ein irreductibler

Bruch, wie es $\frac{a}{b}$ war (§. 29); haben 10 und b ein gemeinschaftliches Maaß (2 oder 5 oder $2 \cdot 5$) so wird eine Aufhebung stattfinden. Bei fortgesetzter Multiplikation Zählers und Nenners mit 10 wird einmal eine vollständige Aufhebung erfolgen, wenn b keine anderen Primfaktoren enthält als 2 und 5; dann ist der Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt; enthält dagegen b andre Primfaktoren, so wird niemals eine solche vollständige Aufhebung erfolgen; die Rechnung des §. 47, welche im Wesen mit Obigem übereinstimmt, bricht nie ab; der Decimalbruch wird unendlich.

Im ersten Falle erhält der Decimalbruch so viele Bruchstellen, als Reduktionen auf die niedere Stelle, d. h. als Multiplikationen mit 10 erforderlich sind, um eine vollständige Aufhebung hervorzubringen. Die Anzahl der Bruchstellen ist also gleich der Anzahl der Zweier-Faktoren, oder gleich der Anzahl der Fünfer-Faktoren des gegebenen Nenners, je nachdem derselbe mehr Zweier- oder mehr Fünfer-Faktoren enthält.

§. 52. Jeder gemeine Bruch, welcher einen unendlichen Decimalbruch liefert, liefert einen periodischen.

Der gemeine Bruch sei $\frac{a}{b}$. Bei dem Divisor b kann nur eine beschränkte Anzahl von Resten bleiben, höchstens $b - 1$, da jeder Rest kleiner ist, als der Divisor; nach einer gewissen beschränkten Anzahl von Reduktionen muß also einmal ein Rest wiederkehren, der schon da war; das erste Mal, wie das zweite Mal wird dieser Rest auf dieselbe Weise auf die nächst niedrige Stelle reducirt, indem er mit 10 multiplicirt wird; liefert also beide Mal, abgesehen vom Stellenwerth, dasselbe Glied des Dividenden; mithin auch beide Mal dieselbe Quotientenziffer, mithin auch denselben folgenden Rest, u. s. w. Sobald also ein Rest wiederkehrt, werden von da ab alle Reste periodisch wiederkehren, und somit auch die Quotientenziffern, d. h. der Bruch wird periodisch.

Ein gemeiner Bruch ist also niemals gleich einem unperiodischen Decimalbruch.

§. 53. 1. Wenn der Nenner eines gemeinen Bruches relative Primzahl zu 10 ist (weder Zweier- noch Fünfer-Faktoren enthält) so ist er gleich einem vollständig periodischen Decimalbruche.

Der Bruch sei $\frac{a}{b}$, und b relative Primzahl zu 10, so muß nach §. 52. ein Rest einmal wiederkehren, und von da an alle Reste periodisch; es ist nur zu zeigen, daß unter der aufgestellten Bedingung der erste Rest wiederkehrt (d. h. der Rest, welcher auf die erste Bruchstelle reducirt wurde; wenn $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch ist, so ist a selbst dieser erste Rest).

Es seien ... $k \mid m$... auf einander folgende Reste; m sei ein Rest, welcher nach einer gewissen Zahl anderer Reste wiederkehrt; es sei l' der an der zweiten Stelle ihm vorangehende, so ist zu zeigen, daß $l' = l$

m entsteht an der ersten Stelle aus l , indem l mit 10 multiplicirt, das Produkt durch b dividirt, der Quotient q mit b multiplicirt und das Produkt bq von $10 \mid l$ abgezogen wird; also ist

$$10 \mid l = bq + m$$

Aus gleichen Gründen ist für die 2te Stelle des m

$$10 \mid l' = bq' + m$$

Folglich durch Subtraction

$$10 (l - l') = b (q - q')$$

Wäre l von l' verschieden, so wäre auch q von q' verschieden, also b ein Maaf von $10 (l - l')$, also nach §. 29. b ein Maaf von $l - l'$; das ist nicht möglich, weil l sowohl wie l' kleiner als b ist.

Wenn also ein Rest wiederkehrt, so kehrt auch der vorhergehende wieder, mithin auch der erste, d. h. der Bruch ist vollständig periodisch.

2. Durch Verbindung dieses Satzes mit den Schlüssen des §. 51. ergibt sich leicht.

Ein gemeiner Bruch, dessen Nenner nicht relative Primzahl zu 10 ist, aber außer Zweier- und Fünfer-Faktoren noch andre Faktoren enthält ist gleich einem unvollständig periodischen Decimalbruch mit so viel Bruchvorstellen, als er Zweier- oder Fünfer-Faktoren in der Mehrzahl enthält.

§. 54. Verwandlung eines Decimalbruchs in einen gemeinen Bruch.

1. Einen endlichen Decimalbruch verwandelt man in einen gemeinen Bruch, indem man ihn in gemeiner Bruchform schreibt, und wo möglich aufhebt (§. 42.)

2. Ein periodischer Decimalbruch ist gleich einem gemeinen Bruche, dessen Zähler man erhält, indem man das, was vor der

ersten Periode steht (als ganze Zahl betrachtet) von dem, was vor der 2ten Periode steht (ebenfalls als ganze Zahl betrachtet) abzieht, und dessen Nenner so viel Neunen erhält, als die Periode Stellen hat, und so viel rechts angehängte Nullen als Bruchvorsteller da sind. Wo möglich hebt man auf.

$$\begin{aligned} 3. \text{ B. } 1, 48 \, 2673 \, 2673 \dots &= \frac{1482673 - 148}{999900} = \frac{1482525}{999900} \\ &= \frac{599}{404} = 1 \frac{195}{404} \end{aligned}$$

Denn bezeichnet man der Kürze halber den Decimalbruch mit w , so daß

$$w = 1, 48 \, 2673 \dots$$

$$\text{so ist } 1000000 \, w = 1482673, 2673 \dots$$

$$100 \, w = 148, 2673 \dots$$

In der ersten Gleichung hat der Coefficient von w so viel Nullen, als der Decimalbruch Periodenstellen und Bruchvorstellen hat; in der zweiten so viel, als er Bruchvorstellen hat. Zieht man ab, so erhält man

$$999900 \, w = 1482673 - 148 = 1482525$$

indem Alles, was rechts vom Komma steht, sich aufhebt. Der Coefficient von w hat hier so viele Nullen, als in den obigen Gleichungen die beiden Coefficienten übereinstimmend haben, d. h. so viel als der Decimalbruch Bruchvorstellen hat, und so viel Neunen, als der erste Coefficient vor dem zweiten Nullen voraus hat, d. h. so viel, als der Decimalbruch Periodenstellen hat

$$\text{demnach } w = \frac{1482525}{999900} = \frac{599}{404} = 1 \frac{195}{404}$$

Diese Regel umfaßt natürlich auch den Fall, wo der gegebene Decimalbruch keine Stellen links vom Komma, und den, wo er keine Bruchvorstellen hat. Für Anfänger ist es zweckmäßig, von diesen besonderen einfacheren Fällen auszugehen.

3. Die Aufgabe, einen unperiodischen Decimalbruch in einen gemeinen zu verwandeln, kann gar nicht gestellt werden, da nach §. 52. kein gemeiner Bruch einem unperiodischen Decimalbruche gleich ist. Ein unperiodischer Decimalbruch ist demnach der Ausdruck eines Verhältnisses, welches sich nicht in endlicher Form darstellen läßt; eine solche Zahl heißt irrational. Sie wird durch den Decimalbruch näherungsweise dargestellt, und zwar mit um so größerer Näherung, je mehr Bruchstellen er hat.

§. 55. Bei Verbindungen von gemeinen Brüchen und Decimalbrüchen kann man, je nach dem Zwecke und der Bequemlichkeit der Rechnungen, die gemeinen Brüche in Decimalbrüche und die Decimalbrüche in gemeine Brüche verwandeln. Bei der Multiplikation und Division ist nach §. 41. eine solche Verwandlung nicht nöthig, bei der Addition und Subtraction ist sie erforderlich.

Drittes Capitel.

Die Grundrechnungsarten in algebraischen Zahlen.

§. 56. Erklärung. Eine algebraische Zahl ist eine Zahl mit additiver oder subtractiver Beziehung.

Eine Zahl mit additiver Beziehung, ist eine Zahl mit der Beziehung, daß sie zu einer (absoluten) Zahl hinzugefügt, diese um ihren Werth vermehrt. Eine Zahl mit subtractiver Beziehung ist eine Zahl mit der Beziehung, daß sie zu einer (absoluten) Zahl hinzugefügt, diese um ihren Werth vermindert. — Eine Zahl mit additiver Beziehung nennt man positiv; eine Zahl mit subtractiver Beziehung negativ. — Man bezeichnet positive Zahlen durch Vorsetzung des Additionszeichens $+$, negative durch Vorsetzung des Subtractionszeichens $-$.

$+ 7$ ist demnach eine Zahl, welche zu einer (absoluten) Zahl hinzugefügt, dieselbe um 7 vermehrt; $- a$ ist eine Zahl, welche zu einer (absoluten) Zahl hinzugefügt, dieselbe um a vermindert.

Anm. Eine absolute Zahl zu einer absoluten Zahl hinzugefügt, vermehrt diese natürlich ebenfalls um ihren Werth; denkt man sich die Additionsbeziehung mit dem Zahlenwerth verbunden, so geht die absolute Zahl in eine algebraische und zwar positive über. Deshalb ist es häufig ohne Nachtheil, absolute und positive Zahlen mit einander zu verwechseln; darin liegt der Grund, weshalb man oft bei positiven Zahlen das Vorzeichen wegläßt.

Erläuterung der erklärten Begriffe durch Beispiele, namentlich durch die sehr nahe entsprechenden geometrischen Beziehungen der Richtung.

1. Addition algebraischer Zahlen.

§. 57. Die Summe algebraischer Zahlen läßt sich zunächst darstellen durch ihre Summanden, indem dieselben mit ihren Vorzeichen neben einander geschrieben werden. Mehrgliedrige Größe. Glieder (§. 5.)

$+ a - b + c$ ist eine mehrgliedrige Größe, deren Glieder $+ a, - b, + c$ sind.

Die Reihenfolge der Summanden ist willkürlich.

Die Aufgabe der Addition algebraischer Zahlen ist: die Summe in Form einer eingliedrigen algebraischen Zahl darzustellen, oder, wenn dies nicht möglich ist, sie auf möglichst wenige Glieder zurückzuführen.

§. 58. Addition bestimmter algebraischer Zahlen

Die Summe zweier bestimmten algebraischen Zahlen läßt sich immer in Form einer eingliedrigen algebraischen Zahl darstellen.

$+ 7 + 4 = + 11$ denn $+ 7$ ist eine Zahl, welche zu einer absoluten Zahl hinzugefügt, dieselbe um 7 vermehrt; $+ 4$ ist eine Zahl, welche zu einer absoluten Zahl hinzugefügt, dieselbe um 4 vermehrt; beide zusammen bilden also eine Zahl, welche eine absolute Zahl um 11 vermehrt d. h. $+ 11$.

$+ 7 - 4 = + 3$ denn $+ 7$ ist eine Zahl, welche, zu einer absoluten Zahl hinzugefügt, dieselbe um 7 vermehrt; $- 4$ ist eine Zahl, welche zu einer absoluten Zahl hinzugefügt, dieselbe um 4 vermindert; beide zusammen bilden also eine Zahl, welche eine absolute Zahl um 3 vermehrt d. h. $+ 3$

Aus ähnlichen Gründen ist:

$$- 7 + 4 = - 3$$

$$- 7 - 4 = - 11$$

Regel. Man addirt 2 bestimmte algebraische Zahlen von gleichen Vorzeichen, indem man ihre Zahlenwerthe addirt und der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen giebt.

Man addirt 2 bestimmte algebraische Zahlen von entgegengesetzten Vorzeichen, indem man den kleineren Zahlenwerth von dem größeren subtrahirt, und der Differenz das Vorzeichen des größeren Zahlenwerthes giebt.

2. Die Summe mehrerer bestimmten algebraischen Zahlen läßt sich immer in Form einer eingliedrigen algebraischen Zahl darstellen; die Mittel dazu sind in 1 gegeben; es fragt sich nur, welche Reihenfolge besonders zweckmäßig ist. Bei kleineren Zahlen ist sie gleichgültig; für größere sind folgende 2 Verfahrensarten die angemessensten.

a. Man addirt die positiven Summanden unter sich und die negativen unter sich, und addirt dann die Summe der positiven Zahlen zu der Summe der negativen.

b. Man schreibt alle Summanden, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen so unter einander, daß die gleichnamigen Stellen unter einander stehen, und addirt stellenweise mit Rücksicht auf die Vorzeichen; man ordnet die positiven Summenziffern in eine Summenreihe, und die negativen Summenziffern in eine zweite Summenreihe, welche man dann zu einer dekadischen Zahl vereinigt.

3. B.

$$\begin{array}{r}
 + 37854 \\
 - 2945 \\
 - 197 \\
 + 7835 \\
 - 12962 \\
 + 7898 \\
 \hline
 + 37503 \\
 - 00020 \\
 \hline
 + 37483
 \end{array}$$

§. 59. Addition unbestimmter algebraischer Zahlen.

1. Die Summe gleichnamiger (§. 15.) algebraischer Zahlen läßt sich in Form einer eingliedrigen algebraischen Zahl darstellen, indem man die Coefficienten mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen addirt und der Summe die gemeinschaftliche Hauptgröße giebt.

Die Regel ergiebt sich am einfachsten, wenn man die Hauptgrößen als die den Coefficienten zu Grunde liegenden Einheiten betrachtet.

2. Die Summe ungleichnamiger algebraischer Zahlen läßt sich nicht in Form einer eingliedrigen algebraischen Zahl darstellen; die Aufgabe für sie beschränkt sich also dahin, die Summe auf möglichst wenige Summanden zurückzuführen. Daher die Regel:

Man ordnet die gleichnamigen Glieder unter einander, die ungleichnamigen neben einander, und addirt gliedweise.

2. Subtraction algebraischer Zahlen.

§. 60. Die Subtraction algebraischer Zahlen läßt sich immer auf eine Addition zurückführen — jede Differenz algebraischer Zahlen läßt sich in eine Summe verwandeln, indem man das Vorzeichen des Subtrahenden, oder, wenn dieser mehrgliedrig ist, die Vorzeichen der Glieder des Subtrahenden in die entgegengesetzten verwandelt.

$$a - (+ b) = a - b$$

$$a - (- b) = a + b$$

$$a - (+ b - c + d) = a - b + c - d$$

Folgt aus der Erklärung der Subtraction. Der Minuend a ist eine Zahl von irgend welcher Form, ohne Unterschied, ob absolut oder algebraisch.

Da der Subtrahend in Klammern eingeschlossen ist, welche durch Verwandlung der Subtraction in eine Addition wegfallen, so spricht man die letzte Regel auch so aus: Man löst eine negative Klammer auf, indem man die Vorzeichen in der Klammer umkehrt, und die Klammer wegläßt.

Wie löst man eine positive Klammer auf?

das Vorzeichen $+$, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen haben, das Vorzeichen $-$, wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.

§. 65. Division einer mehrgliedrigen GröÙe durch eine eingliedrige. Vgl. §. 22. §. 32. 7.

Hierauf beruht das Absondern eines gemeinsamen Faktors, d. h. das Darstellen einer mehrgliedrigen GröÙe in Form eines Produktes, dessen einer Faktor ein gemeinsames Maas der Glieder der mehrgliedrigen GröÙe ist.

§. 66. Division einer mehrgliedrigen GröÙe durch eine mehrgliedrige. Die Aufgabe derselben ist:

Darstellung des Quotienten zweier mehrgliedrigen GröÙen in Form einer mehrgliedrigen GröÙe, deren Glieder, wenn sie (theilweise oder alle) Brüche sind, keine mehrgliedrigen Nenner haben.

Wenn man 2 mehrgliedrige GröÙen mit einander multiplicirt, so tritt gewöhnlich der Fall ein, daß einzelne Produktglieder unter sich gleichnamig sind, so daß nach der Addition das Produkt nicht mehr unmittelbar erkennen läßt, wie seine Glieder aus den Gliedern der Faktoren entstanden sind, indem einzelne Glieder des Produktes nicht durch reine Multiplikation, sondern durch Addition zweier oder mehrerer Partialprodukte entstanden sind. Einzelne Glieder der Faktoren sind aber so beschaffen, daß ein Produkt aus denselben nie mit dem Produkte aus irgend 2 andern Gliedern gleichnamig sein kann; es sind solche, welche sich dadurch vor den übrigen Gliedern, mit welchen sie zusammengehören, auszeichnen, daß sie in ihrer HauptgröÙe irgend eine Zahl am häufigsten oder am wenigsten als Faktor enthalten. Solche Glieder nennt man charakteristische. Das Produkt zweier entsprechend charakterisirten Glieder zweier mehrgliedrigen Faktoren tritt immer auch rein in dem Produkte der beiden mehrgliedrigen Faktoren hervor, und ist in demselben ein entsprechend charakterisirtes Glied. Hat man demnach umgekehrt eine mehrgliedrige GröÙe durch eine mehrgliedrige zu dividiren, so ist man sicher, ein Glied des Quotienten zu erhalten, wenn man ein charakteristisches Glied des Divisors in das entsprechend charakterisirte Glied des Dividenden dividirt. Daraus ergibt sich die Divisionsregel

Man dividirt eine mehrgliedrige GröÙe durch eine mehrgliedrige, indem man ein charakteristisches Glied des Divisors wählt, dasselbe in das entsprechende Glied des Dividenden dividirt, den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, das Produkt von dem Dividenden subtrahirt, und so fort fährt, bis die Division aufgeht, oder bis sich herausstellt, daß sie nicht aufgeht, daß also die vollständige Lösung der Aufgabe nicht möglich ist.

Beispiel und Schema:

$$\begin{array}{r|l}
 2a^4 + 24b^4 - 13a^3b - 38ab^3 + 31a^2b^2 & 2a^2 + 4b^2 - 3ab \\
 - 2a^4 - 24b^4 + 3a^3b + 20ab^3 - 4a^2b^2 & + a^2 - 5ab + 6b^2 \\
 \hline
 & - 10a^3b - 18ab^3 + 27a^2b^2 \\
 & + 10a^3b + 18ab^3 - 15a^2b^2 \\
 & \hline
 & + 12a^2b^2 \\
 & - 12a^2b^2 \\
 \hline
 2a^4 + 24b^4 - 13a^3b - 38ab^3 + 31a^2b^2 & 2a^2 + 4b^2 - 3ab \\
 - 2a^4 - 24b^4 + 10a^3b + 18ab^3 - 12a^2b^2 & + 6b^2 - 5ab + a^2 \\
 \hline
 & - 3a^3b - 20ab^3 + 19a^2b^2 \\
 & + 3a^3b + 20ab^3 - 15a^2b^2 \\
 & \hline
 & + 4a^2b^2 \\
 & - 4a^2b^2 \\
 \hline
 \end{array}$$

In dem vorliegenden Beispiel enthält der Divisor 2 charakteristische Glieder, $2a^2$ und $4b^2$; das erste dadurch charakterisirt, daß es die meisten a -Factoren (die höchste Potenz von a), das 2te dadurch charakterisirt, daß es die meisten b -Factoren (die höchste Potenz von b) enthält. In der ersten Rechnung ist das charakteristische Glied $2a^2$, in der 2ten $4b^2$ gewählt. In der ersten ist $2a^2$ in das entsprechende Glied $2a^4$ dividirt; es ist dadurch der Quotient a^2 erhalten. Dieser giebt, mit dem Divisor multiplicirt, $2a^4 + 4a^2b^2 - 3a^3b$; die Glieder dieses Productes sind zum Behufe der Subtraction mit umgekehrten Vorzeichen unter die entsprechenden Glieder des Dividenden geordnet; nach erfolgter Subtraction (Addition) bleibt der Dividend

$$+ 24b^2 - 10a^3b - 38ab^3 + 27a^2b^2$$

Unter den Gliedern dieser Summe ist $- 10a^3b$ das dem gewählten charakteristischen Gliede des Divisors entsprechende; es liefert den Quotienten $- 5ab$; dieser Quotient mit dem Divisor multiplicirt giebt das Product $- 10a^3b - 20ab^3 + 15a^2b^2$; die Glieder dieses Productes sind zum Behufe der Subtraction mit umgekehrten Vorzeichen unter die entsprechenden Glieder des Dividenden geordnet; nach erfolgter Subtraction (Addition) bleibt der Dividend $+ 24b^4 - 18ab^3 + 12a^2b^2$. Unter den Gliedern dieser Summe ist $+ 12a^2b^2$ das dem gewählten charakteristischen Gliede des Divisors entsprechende, es liefert den Quotienten $+ 6b^2$; dieser Quotient mit dem Divisor multiplicirt giebt das Product, $+ 12a^2b^2 + 24b^4 - 18ab^3$. Die Glieder dieses Productes sind zum Behufe der Subtraction mit umgekehrten Vorzeichen unter die entsprechenden Glieder des Dividenden geordnet; nach erfolgter Subtraction (Addition) bleibt 0. Also ist $a^2 - 5ab + 6b^2$ der Quotient, denn aus der Rechnung selbst geht hervor, daß $a^2 - 5ab + 6b^2$ eine Zahl ist, welche mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden giebt.

In der 2ten Rechnung ist mit dem gewählten charakteristischen Gliede in entsprechender Weise verfahren; dadurch hat sich derselbe Quotient, nur mit andrer Reihenfolge der Glieder ergeben.

Wenn einzelne der Produktglieder, welche durch Multiplikation der Quotientenglieder mit dem Divisor entstehen, keine gleichnamigen unter den Gliedern des Dividenden finden, so ordnet man ihre entgegengesetzt genommenen Werthe zur Seite, wo sie als Fortsetzung des Dividenden stehen, wie im folgenden Beispiel

$$\begin{array}{r|l}
 a^4 - 9a^2b^2 - 6abc^2 - c^4 & a^2 - 3ab - c^2 \\
 - a^4 + 9a^2b^2 + 3abc^2 + c^4 & a^2 + 3ab + c^2 \\
 \hline
 & + 3a^3b + a^2c^2 \\
 & - 3a^2b - a^2c^2
 \end{array}$$

Viertes Capitel.

Lehre von den Potenzen.

§. 67. Erklärung. Eine Potenz ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus einer gegebenen Zahl, der Grundgröße, entsteht, wie eine andre gegebene Zahl, der Exponent, durch Addition aus 1 entstanden ist. a^p ist eine Potenz mit der Grundgröße a und dem Exponenten p .

§. 68. Betrachtung der Potenz für verschiedene Klassen von Werthen des Exponenten.

Der Exponent kann eine absolute oder algebraische Zahl sein.

1. Der Exponent sei eine **absolute** Zahl.

α . Der Exponent sei eine **ganze** Zahl.

Die Potenz a^3 ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie 3 durch Addition aus 1.

$$3 = 1 + 1 + 1 \quad a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Vgl. §. 14.

Ann. Eine Potenz, deren Exponent eine ganze Zahl ist, nennt man gewöhnlich eine ganze Potenz.

β . Der Exponent sei der **umgekehrte Werth einer ganzen Zahl**.

Die Potenz $a^{\frac{1}{4}}$ ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $\frac{1}{4}$ durch Addition aus 1; $\frac{1}{4}$ ist eine Zahl, welche 4 Mal als Summand gesetzt 1 giebt; also ist $a^{\frac{1}{4}}$ eine Zahl, welche 4 Mal als Faktor gesetzt, oder, was dasselbe ist, zur 4ten Potenz erhoben, a giebt. — Diese Zahl schreibt man auch $\sqrt[4]{a}$ und nennt sie die 4te Wurzel aus a .

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ist demnach eine Zahl, welche zur n ten Potenz erhoben a giebt. Die 2te Wurzel nennt man auch Quadratwurzel und schreibt sie $\sqrt{a}$; die 3te Kubikwurzel.

Auch wenn n nicht eine ganze Zahl ist, bezeichnet $\sqrt[n]{a}$ eine Zahl, welche zur n ten Potenz erhoben a giebt.

γ, der Exponent sei irgend ein einfacher Bruch.

Die Potenz $a^{\frac{3}{4}}$ ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $\frac{3}{4}$ durch Addition aus 1; $\frac{3}{4}$ entsteht aus 1, sowohl wenn man zunächst 3 aus 1 und daraus $\frac{3}{4}$ entstehen läßt, als auch, wenn man zunächst $\frac{1}{4}$ aus 1 und daraus $\frac{3}{4}$ entstehen läßt. Dadurch ergibt sich für $a^{\frac{3}{4}}$ sowohl die Form $\sqrt[4]{a^3}$ als auch $\left(\sqrt[4]{a}\right)^3$. —

Der Uebergang von der Form $\left(\sqrt[4]{a}\right)^3$ zu $\sqrt[4]{a^3}$ wird wörtlich ausgedrückt durch die Rechnungsregel: Man potenzirt eine Wurzel, indem man unter dem Wurzelzeichen potenzirt.

In der Form $\sqrt[p]{a^q}$ nennt man p den Wurzelexponenten, q den Potenzexponenten. Aus der Gleichung $\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{p}{q}}$ und S. 33. ergibt sich, daß der Werth einer Wurzel ungeändert bleibt, wenn man Wurzelexponenten und Potenzexponenten mit derselben Zahl multiplicirt oder durch ein gemeinschaftliches Maas dividirt.

Anm. Es ist hier vorausgesetzt, daß p und q ganze Zahlen sind; aus S. 70 wird sich ergeben, daß auch, wenn das nicht der Fall ist

$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$ ist, daß also der Werth einer Wurzel auch dann ungeändert bleibt, wenn man Wurzelexponenten und Potenzexponenten durch eine Zahl dividirt, welche nicht gemeinschaftliches Maas derselben ist.

2. Der Exponent sei eine **algebraische** Zahl.

α. Der Exponent sei eine **positive** Zahl.

Die Potenz a^{+q} ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $+$ q durch Addition aus 1; $+$ q entsteht aus 1, indem man zunächst q aus 1 entstehen läßt, und dieser Zahl additive Beziehung beilegt. Demnach entsteht a^{+q} aus a , indem man zuerst eine Zahl so durch Multiplikation aus a entstehen läßt, wie q durch Addition aus 1 entstanden ist, d. h. a^q , und diese Zahl als eine zu multiplicirende betrachtet. Für diese multiplikative Beziehung hat man kein besonderes Zeichen; es wird a^q ebenso für a^{+q} gesetzt, wie q für $+$ q .

β, der Exponent sei eine **negative** Zahl.

Der Potenz a^{-q} ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $-$ q durch Addition aus 1; $-$ q entsteht aus 1, indem man zunächst q aus 1 entstehen läßt und dieser Zahl subtraktive Beziehung beilegt; a^{-q} entsteht also aus a , indem

man zunächst eine Zahl so durch Multiplikation aus a entstehen läßt, wie q durch Addition aus 1 d. h. a^q bildet, und diese Zahl als eine zu dividirende betrachtet d. h. $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$

Hierauf beruht die Verwandlung eines Bruches, dessen Nenner eine Potenz oder ein Produkt von Potenzen ist, in ein Produkt.
 $\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n}$

γ, Grenzfall. Der Exponent sei $= 0$.

Die Potenz a^0 ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie 0 durch Addition aus 1; 0 entsteht aus 1, indem man 1 von sich selbst subtrahirt; also erhält man a^0 , wenn man a durch sich selbst dividirt d. h. $a^0 = \frac{a}{a}$; das ist $= 1$, mit Ausnahme des einen Falles, wenn $a = 0$ ist; $0^0 = \frac{0}{0}$ ist eine unbestimmte Form.

Betrachtung der Potenz für andre Formen des Exponenten.

§. 69. Eine Potenz, deren Exponent eine Summe ist, ist gleich dem Produkte der Potenzen derselben Grundgröße, deren Exponenten die Glieder des gegebenen Exponenten sind.

$$a^{p+q} = a^p \cdot a^q$$

(p und q stellen jede beliebige, absolute oder algebraische Zahl vor)
 a^{p+q} ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $p+q$ durch Addition aus 1; $p+q$ entsteht aus 1, indem man p entstehen läßt, dann q entstehen läßt, und diese Zahlen addirt. Demnach hat man zuerst eine Zahl so durch Multiplikation aus a entstehen zu lassen, wie p durch Addition aus 1 entsteht d. h. a^p zu bilden, dann ebenso a^q zu bilden, und diese Zahlen zu multipliciren.

Der Uebergang von dem Produkt rechts zu der Potenz links wird durch folgende Rechnungsregel ausgesprochen:

Man multiplicirt Potenzen von gleichen Grundgrößen, indem man die Exponenten addirt.

Ein besondrer Fall des Satzes ist $a^p - q = a^p \cdot a^{-q} = \frac{a^p}{a^q}$

Daraus die Rechnungsregel:

Man dividirt Potenzen von gleichen Grundgrößen, indem man die Exponenten subtrahirt.

§. 70. Eine Potenz, deren Exponent ein Produkt ist, ist gleich einer Potenz, deren Grundgröße selbst eine Potenz der gegebenen Grundgröße mit dem einen

Faktor des Exponenten als Exponent ist, und deren Exponent der andere Faktor des gegebenen Exponenten ist.

$$a^{pq} = (a^p)^q$$

denn a^{pq} ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus der Grundgröße a entsteht, wie der Exponent pq durch Addition aus 1; pq entsteht aus 1, indem man zunächst p aus 1 entstehen läßt, und daraus eine Zahl so bildet, wie q aus 1 entsteht; man hat also zunächst eine Zahl so durch Multiplikation aus a entstehen zu lassen, wie p durch Addition aus 1 entsteht, d. h. a^p zu bilden; und daraus eine Zahl so durch Multiplikation entstehen zu lassen, wie q durch Addition aus 1 entstanden ist, d. h. a^p zur q ten Potenz zu erheben.

Der Uebergang von der Potenzform rechts zu der links wird durch folgende Rechnungsregel ausgesprochen:

Man potenzirt eine Potenz, indem man den Grundgrößenexponenten mit dem Erhebungsexponenten multiplicirt.

Der Satz gilt für jeden absoluten oder algebraischen Werth von p und q ; insbesondere also auch, wenn p und q die umgekehrten Werthe zweier ganzen Zahlen f und g sind. Also ist

$$a^{\frac{1}{fg}} = \left(a^{\frac{1}{f}} \right)^{\frac{1}{g}}$$

$$\sqrt[fg]{a} = \sqrt[g]{\sqrt[f]{a}}$$

folglich

Der Uebergang von der Wurzelform rechts zu der links und durch folgende Rechnungsregel ausgesprochen:

Man zieht eine Wurzel aus einer Wurzel aus, indem man die Wurzelexponenten mit einander multiplicirt.

Folgerung. S. die Anm. zu S. 70. Für jeden Werth von n ist $a^{\frac{1}{n}}$ die Zahl, welcher zur n ten Potenz erhoben a giebt, d. h. $= \sqrt[n]{a}$; für alle Werthe von p und q ist $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Betrachtung der Potenz für besondere Formen der Grundgröße.

§. 71. I. Die Potenz eines Produktes ist gleich dem Produkte der Potenzen der Faktoren.

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Beweis. 1. Der Exponent p sei eine **absolute** Zahl
 α , der Exponent p sei eine **ganze** Zahl

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 b^3$$

β , der Exponent p sei der **umgekehrte Werth** einer **ganzen Zahl**.

$\frac{1}{n}$
 $(ab)^{\frac{1}{n}}$ ist die Zahl, welche zur n ten Potenz erhoben ab giebt;

es giebt aber auch $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$ zur n ten Potenz erhob ab (nach α und §. 68. 1. β) folglich ist

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

Der Uebergang von der Wurzelform links zu der Produktform rechts wird ausgesprochen durch die Rechnungsregel:

Man zieht die Wurzel aus einem Produkt aus, indem man sie aus den einzelnen Faktoren auszieht.

Der Uebergang von der Produktform rechts zu der Wurzelform links wird ausgesprochen durch die Rechnungsregel:

Man multiplicirt **gleichnamige** Wurzeln (d. h. solche, mit gleichen Wurzelexponenten) indem man unter dem Wurzelzeichen multiplicirt.

Das Produkt ungleichnamiger Wurzeln stellt man in Form einer Wurzel dar, indem man die Wurzeln gleichnamig macht, was nach §. 68. 1. γ geschehen kann.

Auf der ersteren der beiden Rechnungsregeln beruht insbesondere das sogenannte Ausziehen rationaler Faktoren

$$\sqrt[5]{32} = 4 \sqrt[5]{2}; \sqrt[5]{a^7 b} = a \sqrt[5]{a^2 b}$$

γ . Der Exponent p sei irgend ein **Bruch**.

Es seien zunächst m und n ganze Zahlen, so ist

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$$

Man folgert hieraus leicht dasselbe auch für den Fall, daß nicht m und n ganze Zahlen sind.

2. Der Exponent p sei eine **algebraische** Zahl.

α . Der Exponent p sei eine **positive** Zahl.

$$(ab)^{+q} = a^{+q} b^{+q} \quad (\S. 68. 2. \alpha)$$

β . Der Exponent p sei eine **negative** Zahl

$$(ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} = \frac{1}{a^q b^q} = \frac{1}{a^q} \cdot \frac{1}{b^q} = a^{-q} b^{-q}$$

γ . Grenzfall. Der Exponent p sei $= 0$

3. Multiplikation algebraischer Zahlen.

§. 61. Multiplikation eingliedriger Zahlen. Die Aufgabe ist, das Produkt in Form einer algebraischen Zahl darzustellen.

1. Multiplikation eines algebraischen Multiplikanden mit einem absoluten Multiplikator.

$$(+a) \cdot b = +ab$$

$$(-a) \cdot b = -ab$$

α. Wenn b eine ganze Zahl ist, so ist $(+a)b$ eine Summe gleicher Summanden, deren jeder $+a$ und deren Anzahl b , deren Summe also $+ab$ ist. Ebenso für $(-a)b$.

β. Wenn b eine gebrochene Zahl $= \frac{c}{d}$ ist, und zwar zunächst so, daß c und d ganze Zahlen sind, so erhält man $(+a)\frac{c}{d}$ nach der Erklärung der Multiplikation, indem man $+a$ c mal als Summand setzt, wodurch man $+ac$ erhält, und dann eine Zahl sucht, welche d mal als Summand gesetzt, $+ac$ giebt; dies ist $\frac{+ac}{d}$; diese Zahl ist aber $= +\frac{ac}{d}$, denn $\left(+\frac{ac}{d}\right)d$ ist $= +ac$. Ebenso für $(-a)\frac{c}{d}$.

Nach §. 40 und 41 ergibt sich leicht, daß dasselbe gilt, wenn c und d auch nicht ganze Zahlen sind.

Regel in Worten?

2. Multiplikation eines absoluten Multiplikanden mit einem algebraischen Multiplikator.

$$a(+b) = +ab$$

$$a(-b) = -ab$$

Denn a mit $+b$ multipliciren heißt: eine Zahl so aus a entstehen lassen, wie $+b$ aus 1 entstanden ist. $+b$ entsteht aus 1 , indem man zunächst b aus 1 entstehen läßt, und der so gebildeten Zahl additive Beziehung beilegt. Man hat also zunächst eine Zahl so aus a entstehen zu lassen, wie b aus 1 , d. h. a mit b zu multipliciren, und der so gebildeten Zahl additive Beziehung zu geben.

Ebenso für $a(-b)$.

Regel in Worten?

3. Aus 1. und 2. zusammen ergibt sich der Satz:

Wenn eine absolute Zahl mit einer algebraischen zu multipliciren ist, so ist es gleichgültig, welche der beiden Zahlen als Multiplikand, welche als Multiplikator betrachtet wird. (Vgl. §. 12, §. 13, §. 32, §. 41.)

Und die Regel:

Man multiplicirt eine absolute Zahl mit einer algebraischen, indem man die absolute Zahl mit dem Zahlenwerthe der algebraischen multiplicirt, und dem

Produkte das Vorzeichen der algebraischen Zahl giebt.

4. Multiplikation einer algebraischen Zahl mit einer algebraischen.

$$(+ a) (+ b) = (+ b) (+ a) = + ab$$

$$(- a) (+ b) = (+ b) (- a) = - ab$$

$$(- a) (- b) = (- b) (- a) = + ab$$

Nach Anleitung von 1. und 2. ergibt sich

$$(+ a) (+ b) = + (+ ab); (+ b) (+ a) = + (+ ab)$$

$$(- a) (+ b) = + (- ab); (+ b) (- a) = - (+ ab)$$

$$(- a) (- b) = - (- ab); (- b) (- a) = - (- ab)$$

und hieraus nach §. 60. die oben symbolisch ausgedrückte Sätze. In Worten der Satz:

Wenn 2 algebraische Zahlen mit einander zu multipliciren sind, so ist es gleichgültig, welche derselben als Multiplikand, welche als Multiplikator betrachtet wird. (Vgl. §. 12. §. 13. §. 32. §. 41.)

Und die Regel:

Man multiplicirt 2 algebraische Zahlen mit einander, indem man die Zahlenwerthe multiplicirt, und dem Produkte das Vorzeichen + giebt, wenn die Faktoren gleiche Vorzeichen haben, das Vorzeichen —, wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.

5. Multiplikation mehrerer algebraischen Zahlen. Das Produkt der Zahlenwerthe erhält das Vorzeichen +, wenn die Anzahl der vorkommenden negativen Faktoren grade oder Null ist; das Vorzeichen —, wenn dieselbe ungrade ist.

§. 62. Multiplikation einer eingliedrigen algebraischen Zahl mit einer mehrgliedrigen. Vgl. §. 15. Regel und Beweis wie dort.

§. 63. Multiplikation einer mehrgliedrigen algebraischen Zahl mit einer mehrgliedrigen. Vgl. §. 16. Regel und Beweis wie dort.

4. Division algebraischer Zahlen.

§. 64. Division eingliedriger Zahlen. Die Aufgabe derselben ist: Darstellung des Quotienten in Form einer algebraischen Zahl.

1. Division einer algebraischen Zahl durch eine absolute. Nach §. 61, 3 erhält man die Regel:

Man dividirt die Zahlenwerthe und giebt dem Quotienten das Vorzeichen des Dividenden.

2. Division einer algebraischen Zahl durch eine algebraische. Nach §. 61, 4 ergibt sich die Regel:

Man dividirt die Zahlenwerthe, und giebt dem Quotienten

das Vorzeichen $+$, wenn Dividend und Divisor gleiche Vorzeichen haben, das Vorzeichen $-$, wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.

§. 65. Division einer mehrgliedrigen GröÙe durch eine eingliedrige. Vgl. §. 22. §. 32. 7.

Hierauf beruht das Absondern eines gemeinsamen Faktors, d. h. das Darstellen einer mehrgliedrigen GröÙe in Form eines Produktes, dessen einer Faktor ein gemeinsames Maas der Glieder der mehrgliedrigen GröÙe ist.

§. 66. Division einer mehrgliedrigen GröÙe durch eine mehrgliedrige. Die Aufgabe derselben ist:

Darstellung des Quotienten zweier mehrgliedrigen GröÙen in Form einer mehrgliedrigen GröÙe, deren Glieder, wenn sie (theilweise oder alle) Brüche sind, keine mehrgliedrigen Nenner haben.

Wenn man 2 mehrgliedrige GröÙen mit einander multiplicirt, so tritt gewöhnlich der Fall ein, daß einzelne Produktglieder unter sich gleichnamig sind, so daß nach der Addition das Produkt nicht mehr unmittelbar erkennen läßt, wie seine Glieder aus den Gliedern der Faktoren entstanden sind, indem einzelne Glieder des Produktes nicht durch reine Multiplikation, sondern durch Addition zweier oder mehrerer Partialprodukte entstanden sind. Einzelne Glieder der Faktoren sind aber so beschaffen, daß ein Produkt aus denselben nie mit dem Produkte aus irgend 2 andern Gliedern gleichnamig sein kann; es sind solche, welche sich dadurch vor den übrigen Gliedern, mit welchen sie zusammengehören, auszeichnen, daß sie in ihrer HauptgröÙe irgend eine Zahl am häufigsten oder am wenigsten als Faktor enthalten. Solche Glieder nennt man charakteristische. Das Produkt zweier entsprechend charakterisirten Glieder zweier mehrgliedrigen Faktoren tritt immer auch rein in dem Produkte der beiden mehrgliedrigen Faktoren hervor, und ist in demselben ein entsprechend charakterisirtes Glied. Hat man demnach umgekehrt eine mehrgliedrige GröÙe durch eine mehrgliedrige zu dividiren, so ist man sicher, ein Glied des Quotienten zu erhalten, wenn man ein charakteristisches Glied des Divisors in das entsprechend charakterisirte Glied des Dividenden dividirt. Daraus ergibt sich die Divisionsregel

Man dividirt eine mehrgliedrige GröÙe durch eine mehrgliedrige, indem man ein charakteristisches Glied des Divisors wählt, dasselbe in das entsprechende Glied des Dividenden dividirt, den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, das Produkt von dem Dividenden subtrahirt, und so fort fährt, bis die Division aufgeht, oder bis sich herausstellt, daß sie nicht aufgeht, daß also die vollständige Lösung der Aufgabe nicht möglich ist.

Beispiel und Schema:

$$\begin{array}{r|l}
 2a^4 + 24b^4 - 13a^3b - 38ab^3 + 31a^2b^2 & 2a^2 + 4b^2 - 3ab \\
 - 2a^4 - 24b^4 + 3a^3b + 20ab^3 - 4a^2b^2 & + a^2 - 5ab + 6b^2 \\
 \hline
 & - 10a^3b - 18ab^3 + 27a^2b^2 \\
 & + 10a^3b + 18ab^3 - 15a^2b^2 \\
 & \hline
 & + 12a^2b^2 \\
 & - 12a^2b^2 \\
 & \hline
 2a^4 + 24b^4 - 13a^3b - 38ab^3 + 31a^2b^2 & 2a^2 + 4b^2 - 3ab \\
 - 2a^4 - 24b^4 + 10a^3b + 18ab^3 - 12a^2b^2 & + 6b^2 - 5ab + a^2 \\
 \hline
 & - 3a^3b - 20ab^3 + 19a^2b^2 \\
 & + 3a^3b + 20ab^3 - 15a^2b^2 \\
 & \hline
 & + 4a^2b^2 \\
 & - 4a^2b^2 \\
 & \hline
 \end{array}$$

In dem vorliegenden Beispiel enthält der Divisor 2 charakteristische Glieder, $2a^2$ und $4b^2$; das erste dadurch charakterisirt, daß es die meisten a -Factoren (die höchste Potenz von a), das 2te dadurch charakterisirt, daß es die meisten b -Factoren (die höchste Potenz von b) enthält. In der ersten Rechnung ist das charakteristische Glied $2a^2$, in der 2ten $4b^2$ gewählt. In der ersten ist $2a^2$ in das entsprechende Glied $2a^4$ dividirt; es ist dadurch der Quotient a^2 erhalten. Dieser giebt, mit dem Divisor multiplicirt, $2a^4 + 4a^2b^2 - 3a^3b$; die Glieder dieses Productes sind zum Behufe der Subtraction mit umgekehrten Vorzeichen unter die entsprechenden Glieder des Dividenden geordnet; nach erfolgter Subtraction (Addition) bleibt der Dividend

$$+ 24b^2 - 10a^3b - 38ab^3 + 27a^2b^2$$

Unter den Gliedern dieser Summe ist $- 10a^3b$ das dem gewählten charakteristischen Gliede des Divisors entsprechende; es liefert den Quotienten $- 5ab$; dieser Quotient mit dem Divisor multiplicirt giebt das Product $- 10a^3b - 20ab^3 + 15a^2b^2$; die Glieder dieses Productes sind zum Behufe der Subtraction mit umgekehrten Vorzeichen unter die entsprechenden Glieder des Dividenden geordnet; nach erfolgter Subtraction (Addition) bleibt der Dividend $+ 24b^4 - 18ab^3 + 12a^2b^2$. Unter den Gliedern dieser Summe ist $+ 12a^2b^2$ das dem gewählten charakteristischen Gliede des Divisors entsprechende, es liefert den Quotienten $+ 6b^2$; dieser Quotient mit dem Divisor multiplicirt giebt das Product, $+ 12a^2b^2 + 24b^4 - 18ab^3$. Die Glieder dieses Productes sind zum Behufe der Subtraction mit umgekehrten Vorzeichen unter die entsprechenden Glieder des Dividenden geordnet; nach erfolgter Subtraction (Addition) bleibt 0. Also ist $a^2 - 5ab + 6b^2$ der Quotient, denn aus der Rechnung selbst geht hervor, daß $a^2 - 5ab + 6b^2$ eine Zahl ist, welche mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden giebt.

In der 2ten Rechnung ist mit dem gewählten charakteristischen Gliede in entsprechender Weise verfahren; dadurch hat sich derselbe Quotient, nur mit andrer Reihenfolge der Glieder ergeben.

Wenn einzelne der Produktglieder, welche durch Multiplikation der Quotientenglieder mit dem Divisor entstehen, keine gleichnamigen unter den Gliedern des Dividenden finden, so ordnet man ihre entgegengesetzt genommenen Werthe zur Seite, wo sie als Fortsetzung des Dividenden stehen, wie im folgenden Beispiel

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 a^4 - 9a^2b^2 - 6abc^2 - c^4 \\
 - a^4 + 9a^2b^2 + 3abc^2 + c^4 \\
 \hline
 - 3abc^2 \\
 + 3abc^2
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 a^2 - 3ab - c^2 \\
 \hline
 a^2 + 3ab + c^2 \\
 + 3a^3b + a^2c^2 \\
 - 3a^2b - a^2c^2
 \end{array}
 \end{array}$$

Viertes Capitel.

Lehre von den Potenzen.

§. 67. Erklärung. Eine Potenz ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus einer gegebenen Zahl, der Grundgröße, entsteht, wie eine andre gegebene Zahl, der Exponent, durch Addition aus 1 entstanden ist. a^p ist eine Potenz mit der Grundgröße a und dem Exponenten p .

§. 68. Betrachtung der Potenz für verschiedene Klassen von Werthen des Exponenten.

Der Exponent kann eine absolute oder algebraische Zahl sein.

1. Der Exponent sei eine **absolute** Zahl.

α . Der Exponent sei eine **ganze** Zahl.

Die Potenz a^3 ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie 3 durch Addition aus 1.

$$3 = 1 + 1 + 1 \quad a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Vgl. §. 14.

Anm. Eine Potenz, deren Exponent eine ganze Zahl ist, nennt man gewöhnlich eine ganze Potenz.

β . Der Exponent sei der **umgekehrte Werth einer ganzen Zahl**.

Die Potenz $a^{\frac{1}{4}}$ ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $\frac{1}{4}$ durch Addition aus 1; $\frac{1}{4}$ ist eine Zahl, welche 4 Mal als Summand gesetzt 1 giebt; also ist $a^{\frac{1}{4}}$ eine Zahl, welche 4 Mal als Faktor gesetzt, oder, was dasselbe ist, zur 4ten Potenz erhoben, a giebt. — Diese Zahl schreibt man auch

$\sqrt[4]{a}$ und nennt sie die 4te Wurzel aus a .

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ist demnach eine Zahl, welche zur n ten Potenz erhoben a giebt. Die 2te Wurzel nennt man auch Quadratwurzel und schreibt sie $\sqrt{a}$; die 3te Kubikwurzel.

Auch wenn n nicht eine ganze Zahl ist, bezeichnet $\sqrt[n]{a}$ eine Zahl, welche zur n ten Potenz erhoben a giebt.

γ , der Exponent sei irgend ein einfacher Bruch.

Die Potenz $a^{\frac{3}{4}}$ ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $\frac{3}{4}$ durch Addition aus 1; $\frac{3}{4}$ entsteht aus 1, sowohl wenn man zunächst 3 aus 1 und daraus $\frac{3}{4}$ entstehen läßt, als auch, wenn man zunächst $\frac{1}{4}$ aus 1 und daraus $\frac{3}{4}$ entstehen läßt. Dadurch ergibt sich für $a^{\frac{3}{4}}$ sowohl die Form $\sqrt[4]{a^3}$ als auch $\left(\sqrt[4]{a}\right)^3$. —

Der Uebergang von der Form $\left(\sqrt[4]{a}\right)^3$ zu $\sqrt[4]{a^3}$ wird wörtlich ausgedrückt durch die Rechnungsregel: Man potenzirt eine Wurzel, indem man unter dem Wurzelzeichen potenzirt.

In der Form $\sqrt[p]{a^q}$ nennt man p den Wurzelexponenten, q den Potenzexponenten. Aus der Gleichung $\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{p}{q}}$ und S. 33. ergibt sich, daß der Werth einer Wurzel ungeändert bleibt, wenn man Wurzelexponenten und Potenzexponenten mit derselben Zahl multiplicirt oder durch ein gemeinschaftliches Maas dividirt.

Anm. Es ist hier vorausgesetzt, daß p und q ganze Zahlen sind; aus S. 70 wird sich ergeben, daß auch, wenn das nicht der Fall ist

$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$ ist, daß also der Werth einer Wurzel auch dann ungeändert bleibt, wenn man Wurzelexponenten und Potenzexponenten durch eine Zahl dividirt, welche nicht gemeinschaftliches Maas derselben ist.

2. Der Exponent sei eine **algebraische** Zahl.

α . Der Exponent sei eine **positive** Zahl.

Die Potenz a^{+q} ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $+q$ durch Addition aus 1; $+q$ entsteht aus 1, indem man zunächst q aus 1 entstehen läßt, und dieser Zahl additive Beziehung beilegt. Demnach entsteht a^{+q} aus a , indem man zuerst eine Zahl so durch Multiplikation aus a entstehen läßt, wie q durch Addition aus 1 entstanden ist, d. h. a^q , und diese Zahl als eine zu multiplicirende betrachtet. Für diese multiplikative Beziehung hat man kein besonderes Zeichen; es wird a^q ebenso für a^{+q} gesetzt, wie q für $+q$.

β , der Exponent sei eine **negative** Zahl.

Der Potenz a^{-q} ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $-q$ durch Addition aus 1; $-q$ entsteht aus 1, indem man zunächst q aus 1 entstehen läßt und dieser Zahl subtraktive Beziehung beilegt; a^{-q} entsteht also aus a , indem

man zunächst eine Zahl so durch Multiplikation aus a entstehen läßt, wie q durch Addition aus 1 d. h. a^q bildet, und diese Zahl als eine zu dividirende betrachtet d. h. $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$

Hierauf beruht die Verwandlung eines Bruches, dessen Nenner eine Potenz oder ein Produkt von Potenzen ist, in ein Produkt.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n}$$

7, Grenzfall. Der Exponent sei $= 0$.

Die Potenz a^0 ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie 0 durch Addition aus 1 ; 0 entsteht aus 1 , indem man 1 von sich selbst subtrahirt; also erhält man a^0 , wenn man a durch sich selbst dividirt d. h. $a^0 = \frac{a}{a}$; das ist $= 1$, mit Aus-

nahme des einen Falles, wenn $a = 0$ ist; $0^0 = \frac{0}{0}$ ist eine unbestimmte Form.

Betrachtung der Potenz für andre Formen des Exponenten.

§. 69. Eine Potenz, deren Exponent eine Summe ist, ist gleich dem Produkte der Potenzen derselben Grundgröße, deren Exponenten die Glieder des gegebenen Exponenten sind.

$$a^{p+q} = a^p \cdot a^q$$

(p und q stellen jede beliebige, absolute oder algebraische Zahl vor) a^{p+q} ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus a entsteht, wie $p+q$ durch Addition aus 1 ; $p+q$ entsteht aus 1 , indem man p entstehen läßt, dann q entstehen läßt, und diese Zahlen addirt. Demnach hat man zuerst eine Zahl so durch Multiplikation aus a entstehen zu lassen, wie p durch Addition aus 1 entsteht d. h. a^p zu bilden, dann ebenso a^q zu bilden, und diese Zahlen zu multipliciren.

Der Uebergang von dem Produkt rechts zu der Potenz links wird durch folgende Rechnungsregel ausgesprochen:

Man multiplicirt Potenzen von gleichen Grundgrößen, indem man die Exponenten addirt.

Ein besondrer Fall des Satzes ist $a^p - q = a^p \cdot a^{-q} = \frac{a^p}{a^q}$

Daraus die Rechnungsregel:

Man dividirt Potenzen von gleichen Grundgrößen, indem man die Exponenten subtrahirt.

§. 70. Eine Potenz, deren Exponent ein Produkt ist, ist gleich einer Potenz, deren Grundgröße selbst eine Potenz der gegebenen Grundgröße mit dem einen

Faktor des Exponenten als Exponent ist, und deren Exponent der andere Faktor des gegebenen Exponenten ist.

$$a^{pq} = (a^p)^q$$

denn a^{pq} ist eine Zahl, welche so durch Multiplikation aus der Grundgröße a entsteht, wie der Exponent pq durch Addition aus 1; pq entsteht aus 1, indem man zunächst p aus 1 entstehen läßt, und daraus eine Zahl so bildet, wie q aus 1 entsteht; man hat also zunächst eine Zahl so durch Multiplikation aus a entstehen zu lassen, wie p durch Addition aus 1 entsteht, d. h. a^p zu bilden; und daraus eine Zahl so durch Multiplikation entstehen zu lassen, wie q durch Addition aus 1 entstanden ist, d. h. a^p zur q ten Potenz zu erheben.

Der Uebergang von der Potenzform rechts zu der links wird durch folgende Rechnungsregel ausgesprochen:

Man potenzirt eine Potenz, indem man den Grundgrößenexponenten mit dem Erhebungsexponenten multiplicirt.

Der Satz gilt für jeden absoluten oder algebraischen Werth von p und q ; insbesondere also auch, wenn p und q die umgekehrten Werthe zweier ganzen Zahlen f und g sind. Also ist

$$a^{\frac{1}{fg}} = \left(a^{\frac{1}{f}} \right)^{\frac{1}{g}}$$

$$\sqrt[fg]{a} = \sqrt[g]{\sqrt[f]{a}}$$

folglich

Der Uebergang von der Wurzelform rechts zu der links und durch folgende Rechnungsregel ausgesprochen:

Man zieht eine Wurzel aus einer Wurzel aus, indem man die Wurzelexponenten mit einander multiplicirt.

Folgerung. S. die Anm. zu S. 70. Für jeden Werth von n ist $a^{\frac{1}{n}}$ die Zahl, welcher zur n ten Potenz erhoben a giebt, d. h. $= \sqrt[n]{a}$; für alle Werthe von p und q ist $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Betrachtung der Potenz für besondere Formen der Grundgröße.

§. 71. I. Die Potenz eines Produktes ist gleich dem Produkte der Potenzen der Faktoren.

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Beweis. 1. Der Exponent p sei eine **absolute** Zahl
 α , der Exponent p sei eine **ganze** Zahl

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 b^3$$

β , der Exponent p sei der **umgekehrte Werth** einer **ganzen Zahl**.

$(ab)^{\frac{1}{n}}$ ist die Zahl, welche zur n ten Potenz erhoben ab giebt;
 es giebt aber auch $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$ zur n ten Potenz erhob ab (nach α und §. 68. 1. β) folglich ist

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

Der Uebergang von der Wurzelform links zu der Produktform rechts wird ausgesprochen durch die Rechnungsregel:

Man zieht die Wurzel aus einem Produkt aus, indem man sie aus den einzelnen Faktoren auszieht.

Der Uebergang von der Produktform rechts zu der Wurzelform links wird ausgesprochen durch die Rechnungsregel:

Man multiplicirt **gleichnamige** Wurzeln (d. h. solche, mit gleichen Wurzelexponenten) indem man unter dem Wurzelzeichen multiplicirt.

Das Produkt ungleichnamiger Wurzeln stellt man in Form einer Wurzel dar, indem man die Wurzeln gleichnamig macht, was nach §. 68. 1. γ geschehen kann.

Auf der ersteren der beiden Rechnungsregeln beruht insbesondre das sogenannte Ausziehen rationaler Faktoren

$$\sqrt[5]{32} = 4 \sqrt[5]{2}; \sqrt[5]{a^7 b} = a \sqrt[5]{a^2 b}$$

γ . Der Exponent p sei irgend ein **Bruch**.

Es seien zunächst m und n ganze Zahlen, so ist

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$$

Man folgert hieraus leicht dasselbe auch für den Fall, daß nicht m und n ganze Zahlen sind.

2. Der Exponent p sei eine **algebraische** Zahl.

α . Der Exponent p sei eine **positive** Zahl.

$$(ab)^{+q} = a^{+q} b^{+q} \quad (\S. 68. 2. \alpha)$$

β . Der Exponent p sei eine **negative** Zahl

$$(ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} = \frac{1}{a^q b^q} = \frac{1}{a^q} \cdot \frac{1}{b^q} = a^{-q} b^{-q}$$

γ . Grenzfall. Der Exponent p sei $= 0$

$$(ab)^0 = \frac{ab}{ab} = \frac{a}{a} \cdot \frac{b}{b} = a^0 b^0$$

Der Satz ist hierdurch in seiner ganzen Ausdehnung bewiesen. In Form einer Rechnungsregel wird er ausgesprochen:

Man potenzirt ein Produkt, indem man die Faktoren potenzirt.

II. Gleicherweise ergibt sich der Satz:

Die Potenz eines **Quotienten** ist gleich dem Quotienten aus den Potenzen des Dividenden und des Divisors

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Als Rechnungsregel:

Man potenzirt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner potenzirt.

Den Rechnungsregeln in I. 1. §. entsprechen für Brüche folgende:

Man zieht eine Wurzel aus einem Bruche aus, indem man sie aus Zähler und Nenner auszieht.

Hierauf beruht insbesondere das Rationalmachen des Nenners. $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$; $\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5} \sqrt{15}$

Man dividirt gleichnamige Wurzeln in einander, indem man unter dem Wurzelzeichen dividirt.

Man dividirt ungleichnamige Wurzeln in einander, indem man sie gleichnamig macht.

§. 72. Potenz einer **algebraischen** Zahl.

Wenn m und n ganze Zahlen bezeichnen, so ist

$$1, (+a)^m = +a^m$$

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}; (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

$$2, (+a)^{\frac{1}{2n}} = \pm a^{\frac{1}{2n}}; \sqrt[2n]{+a} = \pm \sqrt[2n]{a}$$

$(-a)^{\frac{1}{2n}}$ oder $\sqrt[2n]{-a}$ ist imaginair, d. h. es giebt in der Reihe der algebraischen Zahlen keine, welche zu einer graden Potenz erhoben, eine negative Zahl gäbe. Jede in der Reihe der algebraischen oder der absoluten Zahlen liegende Zahl heißt im Gegensatz zu den imaginären eine reelle Zahl.

$$(+a)^{\frac{1}{2n+1}} = +a^{\frac{1}{2n+1}}; \sqrt[2n+1]{+a} = +\sqrt[2n+1]{a}$$

$$(-a)^{\frac{1}{2n+1}} = -a^{\frac{1}{2n+1}}; \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$$

$$\begin{aligned}
 3, \quad & (+ a)^{\frac{2m}{2n+1}} = + a^{\frac{2m}{2n+1}} \\
 & (- a)^{\frac{2m}{2n+1}} = + a^{\frac{2m}{2n+1}} \\
 & (+ a)^{\frac{2n}{2m+1}} = \pm a^{\frac{2n}{2m+1}} \\
 & (- a)^{\frac{2n}{2m+1}} \text{ ist imaginär} \\
 & (+ a)^{\frac{2^{n+1}}{2m+1}} = + a^{\frac{2^{n+1}}{2m+1}} \\
 & (- a)^{\frac{2^{n+1}}{2m+1}} = - a^{\frac{2^{n+1}}{2m+1}}
 \end{aligned}$$

§. 73. Potenz einer mehrgliedrigen GröÙe.

Die allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Potenz einer mehrgliedrigen GröÙe in Form einer mehrgliedrigen GröÙe darzustellen, ist an dieser Stelle unmöglich. Wir beschränken uns auf die Betrachtung der 2ten und 3ten Potenz, der 2ten und 3ten Wurzel.

1*) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ d. h. in Worten?

Das Quadrat, d. h. die 2te Potenz einer mehrgliedrigen GröÙe läÙt sich immer dadurch auf das Quadrat einer zweigliedrigen zurückführen, daÙ man die mehrgliedrige GröÙe als eine zweigliedrige ansieht, in welcher das letzte Glied als das zweite, die Summe der vorhergehenden als das erste betrachtet wird. So ist:

$$\begin{aligned}
 (a + b + c)^2 &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\
 &= 2(a + b)c + c^2 + 2ab + b^2 + a^2 \text{ d. h. in Worten?}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a + b + c + d)^2 &= (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2 \\
 &= 2(a + b + c)d + d^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2ab + b^2 + a^2 \text{ d. h. in Worten?}
 \end{aligned}$$

Wenn man auf die Reihenfolge der Glieder kein Gewicht zu legen braucht, so kann man das in den letzten Gleichungen liegende Gesetz am einfachsten so aussprechen:

Das Quadrat einer mehrgliedrigen GröÙe ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder + dem doppelten Produkte jedes Gliedes mit der Summe der vorhergehenden Glieder.

*) a, b, c, d u. s. w. stellen fortwährend jede beliebige, absolute oder algebraische Zahl vor.

2, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ d. h. in Worten?

Der Cubus, d. h. die 3te Potenz einer mehrgliedrigen Größe läßt sich ebenso auf den Cubus einer 2gliedrigen zurückführen, wie das Quadrat einer mehrgliedrigen Größe auf das Quadrat einer 2gliedrigen.

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ &= 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ &\quad + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &\quad + a^3 \text{ d. h. in Worten?} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^3 &= (a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 \\ &= 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 \\ &\quad + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\ &\quad + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &\quad + a^3 \\ &\quad \text{d. h. in Worten?} \end{aligned}$$

Wenn man auf die Reihenfolge der Glieder kein Gewicht zu legen braucht, so läßt sich das in den letzten Gleichungen liegende Gesetz am einfachsten folgendermaßen aussprechen:

Der Cubus einer mehrgliedrigen Größe ist gleich der Summe der Cuben der einzelnen Glieder + dem dreifachen Produkte des Quadrates jedes Gliedes mit der Summe der vorhergehenden Glieder + dem dreifachen Produkte jedes Gliedes mit dem Quadrate der Summe der vorhergehenden Glieder.

3. Die Quadratwurzel einer mehrgliedrigen Größe läßt sich nur dann in Form einer endlichen mehrgliedrigen Größe darstellen, wenn die gegebene mehrgliedrige Größe sich auf die in 1 gegebene Form zurückführen läßt. Wenn die gesuchte Quadratwurzel sich in endlicher Form darstellen läßt, so sind wenigstens 2 ihrer Glieder charakteristisch; deren Quadrate sind jedenfalls charakteristische Glieder der gegebenen mehrgliedrigen Größe, und nur quadratische Glieder können charakteristisch sein. Man wählt deshalb ein charakteristisches Glied der gegebenen mehrgliedrigen Größe, sucht dessen Quadratwurzel, so ist diese das erste Glied der gesuchten Wurzel. Nachdem man das Quadrat dieses Wurzelgliedes von der gegebenen Größe subtrahirt hat, dividirt man das doppelte Wurzelglied in dasjenige der übrigen gegebenen Glieder, welches unter denselben in gleicher Weise charakterisirt ist, wie das zuerst gewählte quadratische Glied; der Quotient ist das 2te Wurzelglied. Nachdem man das doppelte Produkt der beiden Wurzelglieder und das Quadrat des zweiten Wurzelgliedes von der gegebenen Größe subtrahirt hat, dividirt man wieder das doppelte erste Wurzelglied in dasjenige der übrigen

Glieder der gegebenen Größe, welches unter denselben in gleicher Weise charakterisirt ist, wie das zuerst gewählte quadratische Glied; der Quotient ist das dritte Wurzelglied. Das doppelte Produkt dieses dritten Wurzelgliedes mit der Summe des vorhergehenden und das Quadrat des dritten Wurzelgliedes subtrahirt man von der gegebenen Größe, und fährt so fort. Wenn an einer Stelle der Rest 0 bleibt, so ist, wie aus der Rechnung selbst hervorgeht, die Summe der gefundenen Glieder die gesuchte Quadratwurzel.

4. Die Kubikwurzel einer mehrgliedrigen Größe läßt sich nur dann in Form einer endlichen mehrgliedrigen Größe darstellen, wenn die gegebene mehrgliedrige Größe sich auf die in 2. angegebene Form zurückführen läßt. Aus denselben Gründen, wie in 3., wählt man auch hier ein charakteristisches Glied, und sucht die Kubikwurzel desselben; diese ist das erste Glied der gesuchten Wurzel; nachdem man den Kubus dieses 1sten Wurzelgliedes von der gegebenen Zahl subtrahirt hat, dividirt man das dreifache Quadrat des ersten Wurzelgliedes in dasjenige der noch übrigen gegebenen Glieder, welches unter ihnen dieselbe charakteristische Eigenschaft hat, wie das zuerst gewählte kubische Glied; der Quotient ist das zweite Wurzelglied. Nachdem man das dreifache Produkt des zweiten Gliedes mit dem Quadrate des ersten, das dreifache Produkt des Quadrates des zweiten Gliedes mit dem ersten Gliede und den Cubus des zweiten Gliedes von der gegebenen Größe subtrahirt hat, dividirt man wieder das dreifache Quadrat des ersten Wurzelgliedes in dasjenige der noch übrigen gegebenen Glieder, welches unter ihnen dieselbe charakteristische Eigenschaft hat, wie das zuerst gewählte kubische Glied, so erhält man das dritte Wurzelglied; das dreifache Produkt dieses dritten Wurzelgliedes, mit dem Quadrat der Summe der vorhergehenden, das dreifache Produkt des Quadrates des dritten Gliedes mit der Summe der vorhergehenden und den Kubus des dritten Gliedes subtrahirt man von der gegebenen Größe; und so fort. Wenn nach solcher Subtraction einmal der Rest 0 bleibt, so ist, wie aus der Rechnung selbst hervorgeht, die Summe der bis dahin gefundenen Glieder die gesuchte Kubikwurzel.

§. 74. *) Die 4 Grundrechnungsarten für solche Zahlformen, welche Potenzen enthalten.

1. Addition und Subtraction. Für dieselbe gelten keine andern Regeln, als die in §. 57—60 enthaltenen. Nur ist darauf zu

*) Es wird natürlich nöthig sein, bei jedem der §. 67 bis 72 die betreffenden Umformungen durch Beispiele zu veranschaulichen und theilweise einzüben, die vollständige Einübung geschieht aber zweckmäßiger hier, nachdem die einzelnen Operationen sämmtlich erörtert sind, weil sich dadurch für jedes einzelne Beispiel eine viel größere Mannigfaltigkeit von Umformungen erreichen läßt.

achten, daß sehr häufig Glieder ungleichnamig scheinen können, ohne es zu seyn, z. B. $\frac{2}{c} \sqrt{a^5 b^3} = 2a^2 \sqrt{ac} = 2ac \sqrt{\frac{a^3}{c}} = 2a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{5}{2}}$

2. Multiplikation. Für dieselbe gelten die Regeln der S. 61—63, mit Berücksichtigung von S. 69 und 71.

3. Division. Für dieselbe gelten die Regeln der S. 64—66 mit Berücksichtigung von S. 69 und 71.

Bei der Division mehrgliedriger Größen, deren Glieder theilweise oder sämtlich Wurzeln sind, tritt sehr häufig statt der gewöhnlichen Divisionsaufgabe (S. 64), namentlich, wenn dieselbe nicht möglich ist, die Aufgabe ein, den Quotienten so umzuformen, daß der Divisor keine Wurzel mehr enthält. Auch diese Umformung nennt man: Rationalmachen des Nenners. Sie ist immer dann möglich, wenn der Nenner nur solche Wurzeln enthält, deren Exponent 2 oder eine ganze Potenz von 2 ist, und sie beruht darauf, daß das Produkt aus Summe und Differenz zweier Zahlen gleich der Differenz ihrer Quadrate ist.

$$\begin{aligned} \frac{Z}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{Z (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b} \\ \frac{Z}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} &= \frac{Z (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c} \\ &= \frac{Z (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{a + b - c + 2\sqrt{ab}} \\ &= \frac{Z (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}) (a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(a + b - c)^2 - 4ab} \\ &= \frac{Z (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}) (a + b - c - 2\sqrt{ab})}{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc} \\ \frac{Z}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} &= Z \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \\ &= \frac{Z (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}) (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b} \end{aligned}$$

Anwendung der Potenzlehre auf Zahlensysteme.

§. 75. Erklärung. Ein Zahlensystem ist eine gesetzmäßige Darstellung aller Zahlen als mehrgliedrige Größen, so daß in

sämmtlichen Gliedern die Hauptgrößen ganze Potenzen einer und derselben absoluten ganzen Zahl, die Coefficienten absolute ganze Zahlen kleiner als die Grundgröße, und die Vorzeichen sämtlich + sind.

Die allgemeine Form einer in einem Zahlensystem geschriebenen Zahl ist

$$a x^p + b x^q + c x^r + \dots$$

wo x eine absolute ganze Zahl, p, q, r algebraische ganze Zahlen, $a, b, c, \dots$ absolute ganze Zahlen kleiner als x sind.

Man ordnet die Glieder immer so, daß $p, q, r, \dots$ in abnehmender Reihe auf einander folgen; man kann sie immer so annehmen, daß je 2 auf einanderfolgende die Differenz 1 haben, wenn man nämlich unter die Reihe der Coefficienten auch die Null aufnimmt. Dann ist also die allgemeine Form einer Systemzahl:

$$a x^p + b x^{p-1} + c x^{p-2} + \dots$$

Da die Grundgröße x für alle Glieder dieselbe ist, so schreibt man eine Systemzahl abkürzend, indem man nur die Coefficienten mit darüber gesetzten zugehörigen Exponenten der Grundzahl hinschreibt, und die Grundzahl voran setzt

$$(x) \quad \overset{p}{a} + \overset{p-1}{b} + \overset{p-2}{c} + \dots$$

Da die Exponenten immer um 1 abnehmen, so wird man sie alle kennen, wenn man nur einen und die Reihenfolge der Coefficienten kennt; man schreibt deshalb alle Coefficienten der Reihe nach nebeneinander, schreibt über einen derselben den zugehörigen Exponenten, und macht überdies, wenn die Coefficienten unbestimmte Zahlen sind, über die Reihe derselben einen horizontalen Strich, damit es nicht erscheine, als wenn dieselben durch Multiplikation verbunden wären.

$$(x) \quad \overset{p}{\text{abcd}} \dots = a x^p + b x^{p-1} + c x^{p-2} + d x^{p-3} + \dots$$

Insbefondere bezeichnet man gewöhnlich denjenigen Coefficienten, dessen zugehöriger Exponent 0 ist, wenn es ein bestimmter ist, durch ein nebengesetztes Komma

$$(x) \quad \text{abc}, d \dots = a x^2 + b x^1 + c x^0 + d x^{-1} + \dots$$

Wenn der Exponent 0 der niedrigste ist, so wendet man gar kein besonderes Zeichen an.

Da man die zu den einzelnen Coefficienten gehörigen Hauptgrößen aus ihrer Stellung erkennt, so nennt man sie auch Stellenwerthe und die zugehörigen Exponenten Stellenzeiger.

Dasjenige Zahlensystem, dessen Grundzahl zehn ist, nennt man das Zehnersystem oder das dekadische System; für andre Zahlensysteme hat man entsprechend gebildete deutsche und griechische Namen.

Unsre Betrachtung des Zahlensystems ist keine vollkommen reine und objektive, da alle unsre Namen und Zeichen für Zahl-

begriffe auf dem Zehnersystem beruhen und dasselbe voraussetzen. Die Beispiele werden wir nur aus Systemen wählen, deren Grundzahlen nicht größer als zwölf sind. In jedem Zahlensystem ist die Anzahl der nöthigen Ziffern $x-1$ und die 0; für Zahlensysteme, deren Grundzahlen nicht größer sind als zehn, reichen die betreffenden Ziffern des Zehnersystems vollkommen aus; für das Elfersystem ist noch ein Zahlzeichen für den Zahlbegriff zehn erforderlich; es sei ϕ ; für das Zwölfersystem überdies noch ein Zahlzeichen für den Zahlbegriff Elf: es sei ψ .

Anm. In den folgenden Rechnungen bedarf man einer Tabelle über die Potenzen der Grundzahlen. Am Ende dieser 1. Abtheilung des Buches findet sich eine solche, welche die 9 ersten Potenzen der Zahlen von 2 bis 12 enthält, natürlich im Zehnersystem geschrieben. In der ersten Vertikalreihe stehen die Grundzahlen, in der ersten Horizontalreihe die Exponenten.

§ 76. Verwandlung einer dekadischen Zahl in eine Zahl irgend eines andern Systems.

1. Wenn die gegebene dekadische Zahl eine ganze ist, so dividirt man dieselbe durch die nächst niedere Potenz der neuen Grundzahl, den Rest wieder durch die nächst niedere Potenz der neuen Grundzahl, und sofort bis die Division aufgeht; dies findet immer statt. Die gefundenen Quotienten ordnet man nach ihren Stellenzeigern zusammen.

(X)	253885	=	(VI.)	5335221
			46656	= 6^6
	253885	5		
	233280	7776	= 6^5	
	20605	2		
	15552	1296	= 6^4	
	5053	3		
	3888	216	= 6^3	
	1165	5		
	1080	36	= 6^2	
	85	2		
	72	6	= 6^1	
	13	2		
	12	1	= 6^0	
	1	1		

Beispiele. *)

1. (X) 14195 = (VII) 56246

2. (X) 43808 = (V) 2400213

3. (X) 169889 = (IX) 278035

*) In diesem Abschnitte sind den einzelnen §§. einige Übungsaufgaben beigegeben, weil sich in manchen der gebräuchlichsten Aufgabensammlungen keine derartigen finden.

4. (X) 142 = (XII) $\psi \phi$
 5. (X) 786 = (II) 1100010010
 6. (X) 375973 = (XI) 2374 ϕ 1
 7. (X) 37823 = (III) 1220212212
 8. (X) 9958 = (IV) 2123212

2. Ist die gegebene dekadische Zahl ein Decimalbruch, so verwandle man den Theil desselben, welcher links vom Komma steht, nach der in 1 entwickelten Methode; den Bruchtheil dagegen multiplicire man mit der neuen Grundzahl, den Bruchtheil des Productes wieder mit der neuen Grundzahl und so fort; auf diese Weise dividirt man nach einander durch die (—1)te, (—2)te u. s. w. Potenz der Grundzahl, erhält also in den jedesmal links vom Komma stehenden Theilen die Ziffern der gesuchten Systemzahl. Diese Systemzahl kann endlich oder unendlich werden unter Bedingungen, welche den für Decimalbrüche entwickelten analog sind; wenn sie unendlich wird, so wird sie aus denselben Gründen wie dort periodisch.

$$(X) 22,68 = (V) 42,32$$

$\begin{array}{r} 5^1 = 5 \\ 22 \overline{) 4} \\ 20 \overline{) 1} = 5^0 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0, \overline{) 68} \cdot 5 \\ \underline{3,} \quad 40 \cdot 5 \\ \underline{2,} \quad 00 \end{array}$
--	---

$$(X) 0,7 = (IX) 0,6262 \dots$$

$\begin{array}{r} 0, \overline{) 7} \cdot 9 \\ \underline{6,} \quad 3 \cdot 9 \\ \underline{2,} \quad 7 \end{array}$
--

Beispiele.

1. (X) 7,625 = (IV) 13,22
 2. (X) 3,8125 = (II) 11,1101
 3. (X) 19,3125 = (XII) 17,39
 4. (X) 25,3 = (XI) 23,33...
 5. (X) 7,25 = (III) 21,0202...
 6. (X) 16,9 = (VII) 22,6204 6204...

Periodische Decimalbrüche lassen sich auf demselben Wege in Brüche eines andern Systems verwandeln, und liefern bei dieser Verwandlung entweder endliche oder periodische Systembrüche. In der Regel ist es bequemer, den periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, Zähler und Nenner desselben in Zahlen des neuen Systems zu verwandeln, und diese als solche in einander zu dividiren. Dieses Verfahren setzt also die Kenntniß der Division der Zahlen eines beliebigen Systems voraus.

Übungen im Zählen in verschiedenen Zahlensystemen.

§. 77. Verwandlung einer Zahl eines beliebigen Systems in eine Zahl des dekadischen Systems.

1. Wenn die gegebene Systemzahl eine ganze Zahl ist, so nehme man aus der Potenztabelle die Stellenwerthe derselben als dekadische Zahlen, multiplicire sie mit ihren Coefficienten und addire die Produkte.

$$(VII) 35624 = (X) 9230$$

$$3 \cdot 7^4 = 3 \cdot 2401 = 7203$$

$$5 \cdot 7^3 = 5 \cdot 343 = 1715$$

$$6 \cdot 7^2 = 6 \cdot 49 = 294$$

$$2 \cdot 7^1 = 2 \cdot 7 = 14$$

$$4 \cdot 7^0 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\hline 9230$$

Beispiele.

$$1. (IX) 72835 = (X) 48065$$

$$2. (XII) 39\phi 2 = (X) 6602$$

$$3. (V) 44132 = (X) 3042$$

$$4. (II) 110100011 = (X) 419$$

$$5. (VIII) 127356 = (X) 44782$$

Systembrüche irgend eines Systems verwandelt man am leichtesten in dekadische Zahlen, indem man sie in gemeine Brüche verwandelt, Zähler und Nenner derselben in dekadische Zahlen und die so erhaltenen Brüche in Decimalbrüche verwandelt

$$(IV) 23,302 = (IV) \frac{23302}{1000} = (X) \frac{754}{64} = (X) 11,78125$$

Beispiele.

$$1. (II) 101,01101 = (X) 5,40625$$

$$2. (VI) 352,3 = (X) 140,5$$

$$3. (XII) 7\phi,69 = (X) 94,5625$$

$$4. (III) 2210,21 = (X) 75,77 \dots$$

$$5. (VII) 135,6 = (X) 75,857142 \dots \dots \dots (\text{Per. } 857142)$$

$$6. (XI) 17,\phi = (X) 18,9080 \dots$$

Die Verwandlung periodischer Systembrüche erfolgt in derselben Weise. Die Verwandlung solcher Brüche in gemeine Brüche beruht auf denselben Grundsätzen, wie die der periodischen Decimalbrüche in gemeine, setzt also auch, wie diese, die Subtraction voraus.

§. 78. Verwandlung einer Zahl eines beliebigen Systems in eine Zahl eines beliebigen andern Systems. Man verwandelt die gegebene Zahl in eine dekadische, und diese in eine Zahl des verlangten Systems.

Beispiele.

$$1. (VIII) 271352 = (XI) 65382$$

$$2. (V) 24132 = (XII) 1054$$

$$3. (IX) 7386 = (IV) 1110300$$

$$4. (II) 100000 = (III) 1012 = (IV) 200 = (V) 112 = (VI) 52 \\ = (VII) 44 = (VIII) 40 = (IX) 35 = (X) 32 = (XI) 2\phi = (XII) 28$$

$$5. (XII) 100 = (XI) 121 = (X) 144 = (IX) 170 = (VIII) 220 \\ = (VII) 264 = (VI) 400 = (V) 1034 = (IV) 2100$$

$$= (III) 12100 = (II) 10010000$$

$$6. (VI) 35,24 = (XII) 1\psi,54$$

$$7. (III) 211,012 = (IX) 24,16$$

$$8. (VII) 651,3 = (XI) 280,479479 \dots$$

$$9. (VI) 25,14 = (VIII) 21,21616 \dots$$

$$10. (II) 0,1 = (III) 0,11 \dots = (IV) 0,2 = (V) 0,22 \dots = (VI) 0,3 \\ = (VII) 0,33 \dots = (VIII) 0,4 = (IX) 0,44 \dots = (X) 0,5 \\ = (XI) 0,55 \dots = (XII) 0,6$$

$$11. (XII) 0,1 = (XI) 0,0\phi 0\phi \dots = (X) 0,8333 \dots = (IX) 0,0666 \dots \\ = (VIII) 0,05252 \dots = (VII) 0,0404 \dots = (VI) 0,03 \dots \\ = (V) 0,0202 \dots = (IV) 0,011 \dots = (III) 0,00202 \dots \\ = (II) 0,000101 \dots$$

§. 79. Addition der Systemzahlen.

Die Aufgabe der Addition mehrerer Zahlen eines Systems ist: die Summe in Form einer Zahl desselben Systems darzustellen. Regel wie §. 7 und §. 45. Die Reduktion erfolgt hier natürlich durch die Grundzahl des betreffenden Systemes.

$$\begin{array}{r} (VII) \quad 156,2665 \\ \quad 23,562 \\ \quad 3463,613 \\ \quad 2,25 \\ \hline 4012,3545 \end{array}$$

Beispiele.

1. (VIII) $52326 + 24421 = 76747$
2. (XI) $52973 + 1500\phi = 47982$
3. (III) $21022012 + 212201 + 12212010 + 12201 = 112020201$
4. (IV) $32,23 + 1,3213 + 2322,12 + 232,213 = 3321,2103$
5. (XII) $\phi 2\psi,5 + 73\phi 9,873 + 2\psi, \phi 013 + 153,7\psi = 83\phi 0,7643$
6. (II) $110,101 + 11,001 + 0,1 + 101,01 + 1,1 = 10001$

§. 80. Subtraction der Systemzahlen.

Die Aufgabe der Subtraction zweier Zahlen eines Systems ist: Die Differenz in Form einer Zahl desselben Systems darzustellen. Regel wie §. 10 und §. 46. Reduction durch die betreffende Grundzahl.

$$\begin{array}{r} (XII.) \quad 3\phi 527 \\ \quad 2\psi 89\phi \\ \hline \phi 849 \end{array}$$

Beispiele:

1. (VII) $54623 - 22412 = 32211$
2. (IX) $83767 - 21235 = 62532$
3. (III) $22121 - 12202 = 2212$
4. (V) $42,34 - 1,433 = 40,402$
5. (VI) $352,205 - 21,3415 = 330,4231$
1. (II) $101,1101 - 10,011 = 11,0111$

Wenn mehr als 2 Zahlen durch Addition und Subtraction zu verbinden sind, so verfährt man nach Anleitung des §. 58 a, oder b.

$$(V) \quad 24,4243 - 4,441 + 341 - 0,2201 = 410,2132$$

$$\begin{array}{r} a) \quad 24,4243 \\ \quad 341 \\ \hline 420,4243 \\ \quad 10,2111 \\ \hline 410,2132 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4,441 \\ 0,2201 \\ \hline 10,2111 \end{array}$$

- Beispiele: 1. (XII) $11\phi\psi3\phi\phi2 : 3\psi\phi = 35\phi6\psi$
 2. (VIII) $31455,54 : 32,1 = 765,4$
 3. (IX) $4804 : 823 = 5,3$
 4. (VII) $52 : 33 = 1,3535 \dots$
 5. (IX) $17 : 23 = 0,6763763 \dots$
 6. (VIII) $57 : 34 = 1,5333 \dots$

§. 83. Potenzirung der Systemzahlen.

Wir beschränken uns, wie in §. 73, auf die Betrachtung der zweiten und dritten Potenz und der zweiten und dritten Wurzel.

1. Das Quadrat einer Systemzahl.

Die Aufgabe ist: das Quadrat einer gegebenen Systemzahl in Form einer Zahl desselben Systems darzustellen.

$$\begin{aligned}
 (x) \left(\overline{abcde\dots} \right)^2 &= (ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + ex^{m-4} \dots)^2 \\
 &= a^2 x^{2m} + 2abx^{2m-1} + b^2 x^{2m-2} + 2(ax^m + bx^{m-1})cx^{m-2} + \\
 &+ c^2 x^{2m-4} + 2(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2})dx^{m-3} + d^2 x^{2m-6} + \\
 &+ 2(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3})ex^{m-4} + e^2 x^{2m-8} + \dots \\
 &= a^2 x^{2m} + 2abx^{2m-1} + b^2 x^{2m-2} + 2(ax^1 + bx^0)cx^{2m-3} + \\
 &+ c^2 x^{2m-4} + 2(ax^2 + bx^1 + cx^0)dx^{2m-5} + d^2 x^{2m-6} + \\
 &+ 2(ax^3 + bx^2 + cx^1 + dx^0)ex^{2m-7} + e^2 x^{2m-8} + \dots \\
 &= a^2 x^{2m} + 2abx^{2m-1} + b^2 x^{2m-2} + 2\overline{ab}cx^{2m-3} + c^2 x^{2m-4} + \\
 &+ 2\overline{abc}dx^{2m-5} + d^2 x^{2m-6} + 2\overline{abcd}ex^{2m-7} + e^2 x^{2m-8} + \dots \\
 &= (x)a^2 + 2ab + b^2 + 2\overline{ab}c + c^2 + 2\overline{abc}d + d^2 + \\
 &\quad + 2\overline{abcd}e + e^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Diese mehrgliedrige GröÙe hat alle Eigenschaften einer Systemzahl mit Ausnahme der einen, daß ihre Coefficienten nicht kleiner sind, als die GrundgröÙe; für jede bestimmte Zahl läßt sich diesem Mangel durch Reduction abhelfen.

$$(X) \quad 27943^2 = 780811249$$

$$\begin{array}{r}
 27943^2 = 4^8 \\
 \begin{array}{r}
 28 \\
 49 \\
 486 \\
 81 \\
 2232 \\
 16 \\
 167649 \\
 \hline
 780811249
 \end{array}
 \end{array}$$

Wörtlicher Ausdruck der in obiger Formel enthaltenen Regel und Anwendung derselben auf Beispiele in dekadischen Zahlen, und auf folgende aus andern Zahlensystemen gewählte.

$$1. \text{ (VII.) } 25^2 = 1024$$

$$2. \text{ (IV.) } 232^2 = 201010$$

$$3. \text{ (XII.) } 9,7^2 = 77, \phi 1$$

2. Der Kubus einer Systemzahl.

Die Aufgabe ist, den Kubus einer gegebenen Systemzahl in Form einer Zahl desselben Systems darzustellen.

$$\begin{aligned} (x) \left(\overline{abcd..} \right)^3 &= \left(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \dots \right)^3 \\ &= a^3 x^{3m} + 3a^2 bx^{3m-1} + 3ab^2 x^{3m-2} + b^3 x^{3m-3} + \\ &+ 3(ax^m + bx^{m-1})^2 cx^{m-2} + 3(ax^m + bx^{m-1})^2 cx^{m-2} + \\ &+ c^3 x^{3m-6} + 3(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2})^2 dx^{m-3} + \\ &+ 3(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2})^2 dx^{m-3} + d^3 x^{3m-9} + \dots \\ &= a^3 x^{3m} + 3a^2 bx^{3m-1} + 3ab^2 x^{3m-2} + b^3 x^{3m-3} + \\ &+ 3(ax^1 + bx^0)^2 cx^{3m-4} + 3(ax^1 + bx^0)^2 cx^{3m-5} + c^3 x^{3m-6} + \\ &+ 3(ax^2 + bx^1 + cx^0)^2 ax^{3m-7} + 3(ax^2 + bx^1 + cx^0)^2 dx^{3m-8} + \\ &+ d^3 x^{3m-9} + \dots \\ &= a^3 x^{3m} + 3a^2 bx^{3m-1} + 3ab^2 x^{3m-2} + b^3 x^{3m-3} + 3ab^2 cx^{3m-4} + \\ &+ 3ab^2 cx^{3m-5} + c^3 x^{3m-6} + 3abc^2 dx^{3m-7} + 3abc^2 dx^{3m-8} + \\ &+ d^3 x^{3m-9} + \dots \\ &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3ab^2 c + 3ab^2 c^2 + c^3 \\ &+ 3abc^2 d + 3abc^2 d^2 + d^3 + \dots \end{aligned}$$

Diese mehrgliedrige GröÙe hat alle Eigenschaften einer Systemzahl mit Ausnahme der einen, daß ihre Coefficienten nicht kleiner sind, als die GrundgröÙe; für jede bestimmte Zahl läßt sich diesem Mangel durch Reduktion abhelfen.

$$(X) \quad 2577^3 = 17113674033$$

$$2577^3 = 8$$

60

150

125

13125

3675

343

1387029

37779

343

17113674033

Wörtlicher Ausdruck der in obiger Formel enthaltenen Regel, und Anwendung derselben auf Beispiele in dekadischen Zahlen, und auf folgende in andern Systemen gewählte.

$$1. \quad (XI.) \quad 37^3 = 440\phi 2$$

$$2. \quad (V.) \quad 243^3 = 44422032$$

$$3. \quad (VIII.) \quad 54,34^3 = 253306,2627$$

3. Die Quadratwurzel einer Systemzahl.

Die Aufgabe ist: die Quadratwurzel einer gegebenen Systemzahl in Form einer Zahl desselben Systems darzustellen. — Sie wird nach Anleitung des §. 73. 3 und nach 1 aufgelöst. Danach müssen zunächst die quadratischen Glieder der gegebenen Zahl von den doppelten Produktsgliedern unterschieden werden können. Aus 1. ergibt sich, daß die Stellenzeiger der quadratischen Glieder grade, die Stellenzeiger der doppelten Produktsglieder ungrade sind. Aus 1. ergibt sich aber ferner, daß an den einzelnen Stellen nicht reine quadratische oder doppelte Produktsglieder sich finden, daß dieselben vielmehr durch Reduktionen mit einander vermengt sind; es handelt sich demnach darum, die Glieder rein von einander abzuscheiden. Zu dem Ende bezeichne man zunächst die Stellen, welchen quadratische Glieder angehören, d. h. man theile die gegebene Zahl in Gruppen von je 2 Stellen ab, von einer Stelle mit gradem Stellenzeiger, z. B. von der Einerstelle, ausgehend. Die höchste Gruppe, deren Stellenzeiger $2m$ sein möge, enthält jedenfalls ein charakteristisches quadratisches Glied vollständig, wenn auch nicht rein. Das größte Quadrat einer ganzen Zahl, welches in der Zahl dieser Gruppe enthalten ist, ist als das Quadrat des ersten Wurzelgliedes anzusehen; die Quadratwurzel daraus ist die erste Ziffer der gesuchten Quadratwurzel, und hat den Stellenzeiger m . Der Rest, welchen man erhält, wenn man das Quadrat der ersten Ziffer von der höchsten Gruppe abzieht, gehört nicht dem quadratischen Gliede an; er ist auf die nächst niedere Stelle zu reduciren und zu der an dieser Stelle befindlichen Zahl zu addiren. Die so erhaltene Zahl hat den Stellenzeiger $2m-1$, muß also vollständig das doppelte Produkt des ersten und zweiten Wurzelgliedes enthalten; dividirt man also durch das doppelte erste Glied hinein, so erhält

man als ganzen Quotienten das zweite Glied, d. h. die zweite Ziffer der gesuchten Wurzel mit dem Stellenzeiger $m-1$. Der Rest wird auf die nächstniedere Stelle reducirt, und zu der an derselben befindlichen Ziffer addirt; die so erhaltene Zahl enthält vollständig das Quadrat der gefundenen zweiten Ziffer, mit dem betreffenden Stellenzeiger; sollte das Quadrat der zweiten Ziffer nicht vollständig darin enthalten sein, so ist dies ein Beweis, daß dieselbe zu groß angenommen ist. Das Quadrat der zweiten Ziffer wird subtrahirt und so fortgeföhren.

$$(X) \sqrt{7|80|81|12|49} = 27943$$

$$4 \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

$$4) 38$$

$$28$$

$$100$$

$$49$$

$$54) 518$$

$$486$$

$$321$$

$$81$$

$$558) 2401$$

$$2232$$

$$1692$$

$$16$$

$$5588) 16764$$

$$16764$$

$$9$$

$$9$$

Das Rechnungsverfahren ist durch paarweise Zusammenfassung der Glieder zu vereinfachen.

$$(X) \sqrt{7|80|81|12|49} = 27943$$

$$4 \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

$$4) 380$$

$$329$$

$$54) 5181$$

$$4941$$

$$558) 24012$$

$$22336$$

$$5588) 167649$$

$$167649$$

Wenn die Rechnung nicht mit der letzten gegebenen Ziffer von selbst aufhört, so hat man auf niedrigere Stellen zu reduciren; doch bricht dann die Rechnung für alle diejenigen Systeme nie ab, deren Grundzahlen nicht Quadrate ganzer Zahlen sind; und auch für

Zahlen dieser Systeme gilt dasselbe, wenn der niedrigste Stellenzeiger grade ist, oder wenn bei ungeradem niedrigsten Stellenzeiger nicht das Anhängen einer Null genügt. Die gefundene Systemzahl wird darin auch nicht periodisch; die Wurzel ist vielmehr irrational. Es ergibt sich das als Folgerung aus folgendem Satz:

Wenn die Wurzel einer ganzen Zahl keine ganze Zahl ist, so ist sie irrational; (vorausgesetzt daß der Wurzel-Exponent eine ganze Zahl ist).

Es sei p eine ganze Zahl, $\sqrt[n]{p}$ keine ganze Zahl, so giebt es nicht 2 relative Primzahlen a und b von der Größe, daß $\sqrt[n]{p} = \frac{a}{b}$ wäre, denn es kann nicht $p = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ sein.

Beispiele aus andern als dem dekadischen Zahlensystem.

1. (XI) $\sqrt{5\phi 51} = 81$
2. (IV) $\sqrt{1111210} = 1022$
3. (III) $\sqrt{222,0101} = 12,01$
4. (VIII) $\sqrt{35} = 5,3051505 \dots$

4. Die Cubikwurzel einer Systemzahl.

Die Aufgabe ist: Die Cubikwurzel einer gegebenen Systemzahl in Form einer Zahl desselben Systems darzustellen. Sie wird nach Anleitung des S. 73. 4 und nach 2 aufgelöst. Danach müssen zunächst 3 Klassen von Gliedern von einander unterschieden werden: 1. die kubischen Glieder, 2. die 3fachen Produkte der einzelnen Glieder mit den Quadraten der vorhergehenden Zahlen, 3. die 3fachen Produkte der Quadrate der einzelnen Glieder mit den vorhergehenden Zahlen. Aus 2 ergibt sich, daß diese Unterscheidung durch die Stellenzeiger möglich ist, indem die Stellenzeiger der Glieder der ersten Klasse 3 zum Maße haben, die Stellenzeiger der Glieder der zweiten Klasse durch 3 dividirt den Rest 2 lassen, und die Stellenzeiger der Glieder der dritten Klasse durch 3 dividirt den Rest 1 lassen. Aus 2. ergibt sich aber ferner, daß sich an den einzelnen Stellen nicht reine kubische oder reine dreifache Produktglieder der bezeichneten Art finden, daß dieselben vielmehr durch Reduktionen mit einander vermengt sind; es handelt sich demnach darum, die Glieder rein von einander abzuschneiden. Zu dem Ende bezeichne man zunächst die Stellen, welchen kubische Glieder angehören, d. h. man theile die gegebene Zahl in Gruppen von je 3 Ziffern ab, von einer Stelle mit einem durch 3 theilbaren Stellenzeiger ausgehend. Die höchste Gruppe, deren Stellenzeiger $3m$ sein möge, enthält jedenfalls ein charakteristisches kubisches Glied vollständig, wenn auch nicht rein. Der größte Cubus einer ganzen Zahl, welcher in der Zahl dieser Gruppe enthalten ist, ist als der Cubus des ersten Wurzelgliedes anzusehen; die Cubikwurzel daraus

ist die erste Ziffer der gesuchten Cubikwurzel und hat den Stellenzeiger m . Der Rest, welchen man erhält, wenn man den Cubus der ersten Ziffer von der höchsten Gruppe abzieht, gehört nicht dem kubischen Glieder an; er ist auf die nächst niedere Stelle zu reduciren und zu der an dieser Stelle befindlichen Zahl zu addiren. Die so erhaltene Zahl hat den Stellenzeiger $3m-1$, muß also vollständig das dreifache Produkt des Quadrates des ersten Wurzelgliedes mit dem zweiten Wurzelgliede enthalten. Dividirt man also mit dem dreifachen Quadrate des ersten Wurzelgliedes hinein, so erhält man das zweite Wurzelglied d. h. die zweite Ziffer der gesuchten Wurzel mit dem Stellenzeiger $m-1$; der Rest wird auf die nächst niedere Stelle reducirt und zu der daselbst befindlichen Zahl addirt. Die so gebildete Zahl hat den Stellenzeiger $3m-2$, muß also vollständig das dreifache Produkt des Quadrates des gefundenen zweiten Wurzelgliedes mit dem ersten Wurzelgliede enthalten; sollte dieses Produkt nicht vollständig darin enthalten sein, so ist dies ein Beweis, daß als zweites Wurzelglied eine zu große Zahl angenommen ist. Der Rest wird auf die nächst niedere Stelle reducirt, und zu der daselbst befindlichen Zahl addirt. Die so gebildete Zahl hat den Stellenzeiger $3m-3$, enthält also vollständig den Cubus des zweiten Wurzelgliedes; sollte der Cubus der als zweites Wurzelglied angenommenen Zahl nicht vollständig darin enthalten sein, so wäre dies ein Beweis, daß als zweites Wurzelglied eine zu große Zahl angenommen wäre. Der Cubus wird subtrahirt und so fortgefahen.

$$\begin{array}{r}
 \text{(X)} \quad \sqrt[3]{17 \, 113 \, 674 \, 033} = 2577 \\
 \hline
 8 \, | \, 113 \, | \, 674 \, | \, 033 \\
 \hline
 12) \quad 91 \\
 \quad \quad 60 \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad 311 \\
 \quad \quad \quad 150 \\
 \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 1613 \\
 \quad \quad \quad \quad 125 \\
 \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad 1875) \, 14886 \\
 \quad \quad \quad \quad 13125 \\
 \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad 17617 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 3675 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 139424 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 343 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 198147) \, 1390810 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1387029 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 37813 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 37779 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 343 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 343 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \hline
 \end{array}$$

Das Rechnungsverfahren ist durch Zusammenfassen je dreier Glieder zu vereinfachen.

$$(X) \quad \sqrt[3]{17 \mid 113 \mid 674 \mid 033} = 2577$$

$$12) \quad 9113$$

$$60$$

$$150$$

$$125$$

$$1875) \quad 1488674$$

$$13125$$

$$3675$$

$$343$$

$$198147) \quad 139081033$$

$$1387029$$

$$37779$$

$$343$$

In Betreff derjenigen Zahlen, bei welchen die Rechnung nicht von selbst aufhört, gelten Gesetze, welche denen unter 3. ganz analog sind.

Beispiele aus andern als dem dekadischen Zahlensystem.

$$1. (XII) \quad \sqrt[3]{12145} = 25$$

$$2. (IV) \quad \sqrt[3]{1113120113} = 1013$$

$$3. (III) \quad \sqrt[10]{21120,012222} = 12,22$$

$$4. (VIII) \quad \sqrt[3]{7} = 1,72333 \dots$$

Fünftes Capitel.

Von den Logarithmen.

§. 84. Erklärung. Der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent der als Potenz einer bestimmten Grundgröße gedachten Zahl. — Wenn eine Zahl z als Potenz einer bestimmten Grundgröße a dargestellt wird, und der zugehörige Exponent ist p , so daß

$$z = a^p$$

so nennt man p den Logarithmus von z für die Grundgröße a , und schreibt dies

$$p = \log_a z$$

Wenn die Grundgröße als bekannt vorausgesetzt werden kann, so läßt man das Zeichen derselben in der Regel weg.

Jede absolute Zahl läßt sich als Potenz einer beliebigen absoluten Grundzahl denken; die Exponenten können rational oder irrational sein. Nur die Eins und die Grenzen der Reihe der absoluten Zahlen, 0 und ∞ , können nicht als Grundzahlen gedacht werden.

Die gesetzmäßige Darstellung aller absoluten Zahlen als Potenzen derselben bestimmten Grundzahl nennt man ein Logarithmensystem. Vgl. §. 75.

§. 85. 1. In jedem Logarithmensystem ist $\log 1 = 0$

2. In jedem Logarithmensystem ist der Logarithmus der Grundgröße $= 1$

3. In jedem Logarithmensystem, dessen Grundgröße > 1 ist, sind die Logarithmen aller Zahlen, die > 1 sind, positiv, und ohne Grenze um so größer, je größer die Zahlen sind; die Logarithmen aller Zahlen, die < 1 sind, sind negativ, und dem absoluten Werthe nach ohne Grenze um so größer, je kleiner die Zahlen sind. — In jedem Logarithmensystem, dessen Grundgröße < 1 ist, sind die Logarithmen aller Zahlen, die > 1 sind, negativ, und

dem absoluten Werthe nach ohne Grenze um so größer, je größer die Zahlen sind; die Logarithmen aller Zahlen, die < 1 sind, sind positiv, und ohne Grenze um so größer, je kleiner die Zahlen sind.

§. 86. 1. Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

2. Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen des Dividenden und des Divisors.

3. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt des Exponenten in den Logarithmus der Grundgröße.

Die 3 Sätze sind dieselben, wie die in §. 69 und §. 70.

§. 87. 1. Das Verhältniß der Logarithmen zweier Zahlen ist in allen Logarithmensystemen dasselbe.

Denn bei dem Uebergange von einem logarithmischen Systeme zu einem andern werden die Logarithmen aller Zahlen mit einer konstanten Zahl multiplicirt, nämlich mit dem Logarithmus der Grundzahl des gegebenen Systems nach dem neuen System, oder, was dasselbe ist, mit dem umgekehrten Werthe des Logarithmus der Grundzahl des neuen Systems nach dem gegebenen Systeme. (Folgt aus §. 84.)

2. Das Verhältniß der Logarithmen derselben Zahl in 2 verschiedenen Systemen ist für alle Zahlen dasselbe, und zwar gleich dem umgekehrten Verhältniß der Logarithmen der Grundzahlen der beiden Systeme nach irgend einem Systeme.

3. Die konstante Zahl, mit welcher die Logarithmen aller Zahlen nach einem Logarithmensysteme multiplicirt werden müssen, um von diesem Logarithmensysteme zu einem neuen überzugehen, heißt der Modul des neuen Systems in Bezug auf das alte. Insbesondere nennt man Modul eines Systems die Verhältnißzahl der Logarithmen dieses Systems zu den entsprechenden Logarithmen des natürlichen oder Nepper'schen Systems, d. h. desjenigen, dessen Grundzahl eine bestimmte Irrationalzahl ist, welche auf 7 Bruchstellen:

$$2, 7182818$$

heißt. Die Bedeutung dieses Logarithmensystems kann hier nicht näher entwickelt werden.

§. 88. Das Brigg'sche oder gemeine Logarithmensystem.

1. Das Brigg'sche oder gemeine Logarithmensystem ist dasjenige dessen Grundzahl 10 ist. Die Wichtigkeit desselben beruht in der Uebereinstimmung seiner Grundzahl mit der Grundzahl des dekadischen Zahlensystems.

2. In diesem System sind die Logarithmen aller ganzen Potenzen von 10 ganze Zahlen, die Logarithmen aller andern Rationalzahlen irrational. Denn es sei a irgend eine Rationalzahl, und es gebe keine ganze Zahl f von der Art, daß

$$a = 10^f$$

so giebt es auch keinen einfachen Bruch $\frac{p}{q}$ von der Art, daß

den absoluten Werthe nach so größer, als die Zahlen sind; die Logarithmen aber sind kleiner, als die Zahlen, die sie darstellen. $a = 10^{\frac{p}{q}}$

denn es müßte dann $a^q = 10^p$ sein, was nicht möglich ist.

3. Der Logarithmus einer jeden Rationalzahl, der nicht eine ganze Zahl ist, läßt sich als die Summe einer ganzen Zahl, Charakteristik, plus einem positiven Bruchtheil, Mantisse, in Decimalbruchform näherungsweise darstellen; die Charakteristik kann positiv, negativ, oder auch 0 sein. Wenn die Charakteristik negativ ist, so fügt man sie der positiven Mantisse rechts an.

Ist der Logarithmus einer Zahl negativ, z. B.

$$- 3,5782436$$

so läßt sich derselbe als die Summe einer positiven Mantisse und einer negativen Charakteristik darstellen; denn

$$\begin{aligned} - 3,5782436 &= - 3 - 0,5782436 \\ &= - 4 + (1 - 0,5782436) \\ &= 0,4217564 - 4 \end{aligned}$$

In dieser Form nennt man den Logarithmus halb positiv. Die Rechnung mit halbpositiven Formen der Logarithmen hat keine Schwierigkeit. Nur für die Division ist zu bemerken, daß dem Logarithmus immer solche Form zu geben ist, daß die negative Charakteristik ein Dividuum des Divisors ist.

$$\text{z. B.} \quad \frac{0,4217564 - 4}{3} = \frac{2,4217564 - 6}{3}$$

$$3$$

$$3$$

$$= 0,8072521 - 2$$

4. Die Charakteristik des Logarithmus einer jeden dekadischen Zahl ist gleich dem höchsten Stellenzeiger dieser Zahl.

Denn jede dekadische Zahl $abcd \dots$ liegt zwischen den Zahlen 10^m und 10^{m+1} , ihr Logarithmus also zwischen m und $m+1$.

5. Die Mantissen der Logarithmen aller Zahlen, welche dieselben Ziffern mit gleicher Folge haben, sind einander gleich. — Denn das Verhältniß zweier solchen Zahlen ist eine ganze Potenz von 10, die Differenz ihrer Logarithmen also eine ganze Zahl.

6. Einrichtung der logarithmischen Tafeln, mit besonderer Berücksichtigung der Vega'schen.

Die Brigg'schen Logarithmen, so wie die Logarithmen eines jeden Systems, sind nicht in so einfacher Weise von den Zahlen, denen sie angehören, abhängig, daß sie zum Behufe der Anwendung in jedem einzelnen Falle leicht berechnet werden könnten. Man hat deshalb die Zahlen und ihre Logarithmen in Tabellen zusammengestellt. Die Berechnung solcher Tabellen wurde zuerst von Brigg unternommen und sein Werk von Blacq fortgesetzt.

Jede solche Tabelle hat von selbst 2 Schranken. Zunächst kann sie nicht alle Zahlen mit ihren Logarithmen, sondern nur einen beschränkten Theil derselben geben. Die Vega'schen Tafeln enthalten die Logarithmen aller fünfstelligen dekadischen Zahlen, und somit (nach 5.) auch die Logarithmen aller Zahlen von weniger als 5 Stellen. Zweitens kann eine solche Tabelle nicht die Bollwerth

der Logarithmen, sondern nur Näherungswerte enthalten. (2) Die Vega'schen Tafeln geben siebenstellige Näherungswerte der Logarithmen.

Die Vega'schen Tafeln enthalten, obgleich sie unmittelbar nur die siebenstelligen Näherungswerte der Logarithmen fünfstelliger Zahlen geben, auch die Möglichkeit, die Logarithmen sechsstelliger, siebenstelliger und zum Theil auch achteistelliger Zahlen näherungsweise anzugeben. Es beruht dies in Folgendem:

a. Wenn eine Zahl wächst, so wächst auch der zugehörige Logarithmus, und zwar ist dieser Zuwachs des Logarithmus um so kleiner, je kleiner das Verhältniß des Zuwachses der Zahl zur Zahl selbst ist. Denn

$$\log(a + \varepsilon) = \log \left\{ a \left(1 + \frac{\varepsilon}{a} \right) \right\} = \log a + \log \left(1 + \frac{\varepsilon}{a} \right)$$

b. Für siebenstellige Näherungswerte der Logarithmen sind die Differenzen der Logarithmen mehrerer in der natürlichen Reihe auf einander folgender fünfstelliger Zahlen näherungsweise einander gleich, d. h. die Unterschiede dieser Differenzen sind kleiner als 1 Einheit der siebenten Bruchstelle. (Die Wahrheit dieses Satzes erkennt man durch Beispiele, welche beliebig aus der Logarithmentabelle gewählt sind; der Grund liegt theilweise in a.; vollständig läßt er sich hier nicht entwickeln). Um so mehr ist das also für 10 auf einander folgende sechsstellige, für 100 auf einander folgende 7stellige, für 1000 auf einander folgende 8stellige Zahlen der Fall. Bezeichnet man demnach die Differenz der Logarithmen der beiden auf einander folgenden 5stelligen

dekadischen Zahlen $\overline{abcde}$ und $\overline{abcd(e+1)}$ mit δ , so ist für siebenstellige Näherungswerte der Logarithmen.

$$\log \overline{abcdef} = \log \overline{abcde} + f \cdot \frac{\delta}{10}$$

$$\log \overline{abcdefg} = \log \overline{abcde} + f \cdot \frac{\delta}{10} + \frac{g \cdot \frac{\delta}{10}}{10}$$

$$\log \overline{abcdefgh} = \log \overline{abcde} + f \cdot \frac{\delta}{10} + \frac{g \cdot \frac{\delta}{10}}{10} + \frac{h \cdot \frac{\delta}{10}}{100}$$

In den Vega'schen Tafeln sind immer die hier mit δ bezeichneten Differenzen angemerkt, und für die 9 möglichen Werte von f (g, h) die Werte von $f \cdot \frac{\delta}{10}$ ($g \cdot \frac{\delta}{10}, h \cdot \frac{\delta}{10}$) in kleinen Tabellen zusammengestellt. Sie heißen dort: Partes proportionales Differentiarum (P. P. D.)

In Obigem liegen die Grundlagen für die Regeln über den Gebrauch der Logarithmentafeln; eine specielle Anweisung dazu bleibt dem Unterrichte und den Einleitungen zu solchen Tafeln überlassen. Ebenso in Betreff der Auffindung der zu einem gege-

benen Logarithmus gehörigen Zahl (Numerus). Die zu einem Logarithmus α gehörige Zahl bezeichnet man mit $\text{num. } \alpha$.

§. 89. Anwendung der logarithmischen Rechnung zur Darstellung von Produkten, Quotienten und Potenzen (Wurzeln) bestimmter Zahlen in Form von dekadischen Zahlen.

Sind a, b, p bestimmte Zahlen, so kann man mit Hülfe der Logarithmentafeln die Zahlformen $ab, \frac{a}{b}, a^p$ in Form dekadischer Zahlen darstellen, denn nach §. 86 ist

$$ab = \text{num.} \cdot (\log a + \log b)$$

$$\frac{a}{b} = \text{num.} \cdot (\log a - \log b)$$

$$a^p = \text{num.} \cdot (p \cdot \log a)$$

Sechstes Capitel.

Die einfachsten Reihen.

§. 90. Erklärung. Unter einer Reihe versteht man eine gesetzmäßige Folge von Zahlen. — Das Wesen der Reihe liegt in dem Gesetz und es sind so viele wesentlich verschiedene Reihen denkbar, als verschiedene Gesetze denkbar sind, d. h. unendlich viele. — Die Zahlen, welche die Reihe bilden, nennt man Glieder der Reihe. Jedem Gliede kommt eine bestimmte Stelle in der Reihe zu, welche durch eine Nummer, einen Stellenzeiger, Index angegeben wird. Dasjenige Glied, von welchem man die Bildung der Reihe ausgehen läßt, das Anfangsglied, soll den Stellenzeiger 0 haben. Das allgemeine Zeichen eines Gliedes soll a , und mit Angabe des Index a_n sein. Das Anfangsglied wird also mit a_0 bezeichnet.

Eine Reihe kann endlich oder unendlich sein, d. h. sie kann eine endliche oder unendliche Anzahl von Gliedern haben.

Die Glieder der Reihe können auf verschiedene Weise mit einander verbunden werden; vorzugsweise wichtig sind die Verbindungen durch Addition und die durch Multiplikation; für uns kommen nur die Summen in Betracht.

1. Die arithmetische Reihe.

§. 91. Die arithmetische Reihe ist eine Reihe, in welcher die Differenz je zweier auf einander folgender Glieder konstant ist.

Bezeichnet man die Differenz mit d , so ist

$$a_0 = a_0$$

$$a_1 = a_0 + d$$

$$a_2 = a_1 + d = a_0 + 2d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_0 + 3d$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_0 + nd$$

Die Zahl $a_0 + nd$ nennt man das allgemeine Glied der Reihe, da sie jedes Glied der Reihe darstellt, wenn man dem n jeden Zahlenwerth beilegt.

Das Gesetz der arithmetischen Reihe wird auch dargestellt durch die allgemeine Form $a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

Die erste Form für a_n nennt man die independente, die zweite die rekurrirende Form des allgemeinen Gliedes.

§. 92. Betrachtet man eine endliche Anzahl auf einander folgender Glieder der arithmetischen Reihe, so hat man eine endliche Reihe. Es sei die Anzahl der Glieder n , das erste Glied a , das letzte Glied u , die Differenz wie bisher d , so ist

$$u = a + (n-1)d \quad (\text{I})$$

Bezeichnet man die Summe der n Glieder der Reihe („die Summe der Reihe“) mit s , so hat man

$$\begin{aligned} s &= a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d) \\ s &= u + (u - d) + (u - 2d) + \dots + (u - (n-1)d) \\ \hline 2s &= (a + u)n \\ s &= \frac{(a + u)n}{2} \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

Die Gleichungen I und II stellen 2 von einander verschiedene, einander nicht widersprechende Abhängigkeiten zwischen den 5 Größen a , u , d , n , s dar, so daß sich zwischen jeder derselben und je 3 der übrigen eine Gleichung ableiten läßt; alle diese Gleichungen sind in Bezug auf jede der darin vorkommenden Größen auflösbar, so daß also jede der 5 Größen durch je 3 der übrigen dargestellt werden kann. (S. §. 123).

Es ergiebt dies folgende Ausdrücke:

$$1. \quad a = \frac{u}{s} - \frac{(n-1)d}{(n-1)d}$$

$$= \frac{n}{n} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(u + \frac{1}{2}d)^2 - 2ds}$$

$$= \frac{2s}{n} - u$$

$$2. \quad u = a + (n-1)d$$

$$= \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(a - \frac{1}{2}d)^2 + 2ds}$$

$$\frac{2s}{n} - a$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad d &= \frac{u - a}{n - 1} \\
 &= \frac{2(s - an)}{n(n - 1)} \\
 &= \frac{u^2 - a^2}{2s - (u + a)} \\
 &= \frac{2(nu - s)}{n(n - 1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad n &= 1 + \frac{u - a}{d} \\
 &= \frac{2s}{a + u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d - 2a}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2} \\
 &= \frac{2u + d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2u + d}{2d}\right)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad s &= \frac{1}{2} n \left\{ 2a + (n - 1)d \right\} \\
 &= \frac{1}{2} n \left\{ 2u - (n - 1)d \right\} \\
 &= \frac{1}{2} n (a + u) \\
 &= \frac{(a + u)(d + u - a)}{2d}
 \end{aligned}$$

§. 93. Beispiele der arithmetischen Reihe.

Die ganzen Zahlen bilden in ihrer natürlichen Folge eine arithmetische Reihe. Die Summe der n ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe ist $\frac{n(n+1)}{2}$.

Die ungeraden Zahlen bilden in ihrer natürlichen Reihenfolge eine arithmetische Reihe, deren Differenz 2 ist. Die Summe der n ersten ungeraden Zahlen ist n^2 . Denn die allgemeine Form einer ungeraden Zahl ist $2n - 1$, und diese ist die n te in der Reihe der ungeraden Zahlen.

2. Die geometrische Reihe.

§. 94. Die geometrische Reihe ist eine Reihe, in welcher der Quotient je zweier auf einander folgenden Glieder konstant ist.

Bezeichnet man den Quotienten mit q , so ist

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a_0 \\
 a_1 &= a_0 q \\
 a_2 &= a_1 q = a_0 q^2 \\
 a_3 &= a_2 q = a_0 q^3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 a_n &= a_{n-1} q = a_0 q^n
 \end{aligned}$$

Die Zahl $a_0 q^n$ nennt man das allgemeine Glied der Reihe. Das Gesetz der Reihe wird auch dargestellt durch die Form

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{(a_{n-1})^2}{a_{n-2}}$$

Die erste Form für a_n nennt man die independente, die zweite die refurrirende Form des allgemeinen Gliedes.

§. 95. Betrachtet man eine endliche Anzahl auf einander folgender Glieder der geometrischen Reihe, so hat man eine endliche Reihe. Es sei die Anzahl der Glieder n , das erste Glied a , das letzte Glied u , der Quotient wie bisher q , so ist

$$u = a q^{n-1} \quad (I)$$

Bezeichnet man die Summe der n Glieder der Reihe („die Summe der Reihe“) mit s , so ist

$$\begin{aligned}
 s &= a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} \\
 sq &= aq + aq^2 + \dots + aq^n
 \end{aligned}$$

$$s(1-q) = a(1-q^n)$$

$$s = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \quad (II)$$

Die Gleichungen I und II stellen zwei verschiedene, einander nicht widersprechende Abhängigkeit zwischen den 5 Größen a , u , q , n , s dar, so daß sich zwischen jeder derselben und je drei der übrigen eine Gleichung ableiten läßt. Die meisten dieser Gleichungen sind in Bezug auf die einzelnen darin vorkommenden Größen auflösbar; so weit sie es sind, lassen sich die einzelnen Größen nach je 3 der übrigen darstellen. Dadurch ergeben sich folgende Ausdrücke

$$1. \quad a = \frac{u}{q^{n-1}}$$

$$= \frac{(1-q)s}{1-q^n}$$

$$= uq + (1-q)s$$

$$a(s-a)^{n-1} - u(s-u)^{n-1} = 0$$

$$2. \quad u = \frac{aq^{n-1}}{(1-q)sq^{n-1}}$$

$$= \frac{1-q^n}{a-(1-q)s}$$

$$u(s-u)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$$

$$3. \quad q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$$

$$= \frac{s-a}{s-u}$$

$$q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s-a}{a} = 0$$

$$q^n - \frac{s}{s-u}q^{n-1} + \frac{u}{s-u} = 0$$

$$4. \quad n = \frac{\log u - \log a}{\log q} + 1$$

$$= \frac{\log \{a - (1-q)s\} - \log a}{\log q}$$

$$= \frac{\log u - \log \{uq + (1-q)s\}}{\log q} + 1$$

$$= \frac{\log u - \log a}{\log(s-a) - (\log(s-u))} + 1$$

$$5. \quad s = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$= \frac{u(1-q^n)}{(1-q)q^{n-1}}$$

$$= \frac{a-uq}{1-q}$$

$$= \frac{\frac{n}{u^{n-1}} - \frac{n}{a^{n-1}}}{\frac{1}{u^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}}$$

§. 96. Die Gleichung II in §. 93 läßt sich auch so schreiben:

$$s = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

Ist $q < 1$, so ist das zweite Glied auf der rechten Seite um so kleiner, je größer n ist, und nimmt über jede Grenze hinaus ab, wenn n über jede Grenze hinaus wächst. Die Summe der Reihe nähert sich also um so mehr dem Werthe $\frac{a}{1-q}$, je größer die Anzahl der Glieder ist, und diese Näherung ist unbegrenzt. Man drückt dies durch folgende Sätze aus:

Eine unendliche geometrische Reihe, deren Quotient kleiner als 1 ist, ist **konvergent**. Wenn das erste Glied der Reihe a und der Quotient q ist, so ist die Summe der unendlichen Reihe $\frac{a}{1-q}$.

§. 97. Allgemeine Bemerkungen über Convergenz.

Eine unendliche Reihe heißt **konvergent**, wenn die Summe einer endlichen Anzahl auf einander folgender Glieder sich um so mehr einer endlichen Zahl (oder der Null) nähert, je größer die Anzahl der Glieder ist, und diese Näherung unbegrenzt ist. Die Grenze, welcher sich die Summe nähert, nennt man die Summe der unendlichen Reihe. Erste Bedingung für die Convergenz einer Reihe ist, daß die Glieder selbst fortwährend kleiner werden, und gegen Null konvergiren; diese Bedingung genügt aber im Allgemeinen nicht; z. B. in der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

nehmen die Glieder fortwährend ohne Grenze ab, aber die Reihe konvergirt nicht. Um dies zu erkennen, theile man nur die Reihe in folgender Weise ab:

$$1 + \frac{1}{2} + \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right\} + \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right\} + \left\{ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} \right\} + \dots$$

Die Summe der Glieder, die in 1 Klammer zusammengefaßt sind, ist immer $> \frac{1}{2}$; die Anzahl der Klammern ist unendlich.

Die allgemeine Entwicklung der Convergenz-Bedingungen geht weit über die Grenzen eines Elementar-Lehrbuchs hinaus. Es sollen hier nur 2 Bedingungen angegeben werden, unter welchen immer Convergenz stattfindet.

1. Wenn der Quotient $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ einer Reihe, ohne konstant zu sein, von einem bestimmten Gliede ab immer um eine endliche Größe < 1 ist, so ist die Reihe konvergent. Denn es sei a_p dasjenige Glied, von welchem ab jene Bedingung erfüllt ist, und es sei der größte Werth des Quotienten $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ für Werthe von n , die $> p$ sind, q , so ist

$$a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \dots < a_p + a_p q + a_p q^2 + \dots$$

Da die Reihe rechts konvergent ist (§. 96), so ist es auch die links.

2. Wenn die Glieder der Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, so ist die Reihe konvergent, wenn nur das allgemeine

Glied bei wachsendem Index gegen Null konvergirt. Denn die Reihe sei

$$\dots a_p - a_{p+1} + a_{p+2} - a_{p+3} + \dots$$

so ist die Summe aller Glieder von a_p an $> a_p - a_{p+1}$; denn die Zahlen $(a_{p+2} - a_{p+3}) \dots$ sind der Voraussetzung nach positiv; gleichzeitig ist die Summe aller dieser Glieder $< a_p$, denn dieselbe lassen sich auch so zusammenfassen:

$$a_p - (a_{p+1} - a_{p+2}) - (a_{p+3} - a_{p+4}) - \dots$$

Die Summe der Glieder von a_p an liegt also zwischen 2 Grenzen, welche sich bei unbegrenzt wachsenden p ohne Grenzen nähern. So ist die Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergent. Sie hat den Namen der Leibniz'schen Reihe, weil Leibniz sie summirt und nachgewiesen hat, daß sie gleich dem natürlichen Logarithmus von 2 ist.

3. Die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen.

§. 98. Die endliche Reihe

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

läßt sich summiren, d. h. ihre Summe läßt sich in ihrer Abhängigkeit von n , als Funktion von n , darstellen. Es ist

$$\begin{array}{rcl} 1^3 & = & 1 \\ 2^3 & = (1+1)^3 = & 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ 3^3 & = (2+1)^3 = & 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ \vdots & & \vdots \\ (n+1)^3 & = (n+1)^3 = & n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{array}$$

$$(n+1)^3 = 3S(n^2) + 3 \frac{(n+1)}{2} + (n+1)$$

wo $S(n^2)$ die Summe der gegebenen Reihe bezeichnet. Es ist also

$$\begin{aligned} 3S(n^2) &= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) \\ S(n^2) &= \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

4. Die Reihe der Cuben der natürlichen Zahlen.

§. 99. Die endliche Reihe

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

läßt sich auf folgende Art summiren.

$$\begin{aligned} 1^4 &= (1 + 1)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\ 2^4 &= (2 + 1)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$(n+1)^4 = (n + 1)^4 = n^4 + 4 n^3 + 6 n^2 + 4 n + 1$$

$$(n + 1)^4 = 4 S(n^3) + 6 S(n^2) + 4 S(n) + (n + 1)$$

$$4 S(n^3) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$$

$$= \frac{n^2 (n + 1)^2}{4}$$

$$S(n^3) = \frac{n^2 (n + 1)^2}{4} = \{S(n)\}^2$$

Siebentes Capitel.

Von den Kettenbrüchen.

§. 100. Erklärung. Ein Kettenbruch ist eine zusammen-
gesetzte Bruchform, aus mehreren Brüchen in der Art gebildet, daß
jeder folgende Bruch zu dem Nenner des vorhergehenden addirt ist.
Aus den Brüchen

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}, \dots$$

entsteht also der Kettenbruch

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \frac{p_4}{q_4 + \dots}}}$$

Die Brüche $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}, \dots$ heißen Glieder des Ketten-
bruchs oder Gliedbrüche; ihre Zähler: Gliedzähler, ihre
Nenner: Gliednenner. Die Anzahl der Gliedbrüche kann endlich
oder unendlich sein. Im ersten Falle ist, wie leicht ersichtlich, der
Kettenbruch immer einem einfachen gemeinen Bruche gleich, welcher
mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet werden soll; im 2ten Falle ist er im Allgemeinen

irrational. Wenn man die Kette an irgend einer Stelle abbricht,
so erhält man offenbar nicht den vollständigen Werth des Ketten-
bruchs, aber man erhält einen Bruch, welcher sich unter gewissen
Bedingungen, wie sich später ergeben wird, dem wahren Werthe
des Kettenbruchs um so mehr nähert, eine je größere Anzahl Glieder
man in Betracht zieht. Die so erhaltenen Brüche heißen sonach Näh-
erungsbrüche. Derjenige Näherungsbruch, welcher aus Betrach-

tung der Glieder bis $\frac{p_n}{q_n}$ hervorgegangen ist, wird mit $\frac{a_n}{b_n}$ bezeichnet.

§. 101. Bestimmung der Näherungsbrüche.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2}} = \frac{a_1 q_2}{b_1 q_2 + p_2}$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1 (q_2 + \frac{p_3}{q_3})}{b_1 (q_2 + \frac{p_3}{q_3}) + p_2} = \frac{q_3 a_1 q_2 + a_1 p_3}{q_3 (b_1 q_2 + p_2) + b_1 p_3}$$

$$= \frac{a_2 q_3 + a_1 p_3}{b_2 q_3 + b_1 p_3}$$

$$\frac{a_4}{b_4} = \frac{a_2 (q_3 + \frac{p_4}{q_4}) + a_1 p_3}{b_2 (q_3 + \frac{p_4}{q_4}) + b_1 p_3} = \frac{q_4 (a_2 q_3 + a_1 p_3) + a_2 p_4}{q_4 (b_2 q_3 + b_1 p_3) + b_2 p_4}$$

$$= \frac{a_3 q_4 + a_2 p_4}{b_3 q_4 + b_2 p_4}$$

Hieraus ergibt sich das allgemeine Gesetz in rekurrender Form

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1} q_n + a_{n-2} p_n}{b_{n-1} q_n + b_{n-2} p_n}$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß, wenn in einem bestimmten Beispiel unter den Näherungsbrüchen solche vorkommen, welche nicht in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, nie eine Aufhebung statt finden darf, wenn sie zur weitem Bildung von Näherungsbrüchen verwandt werden sollen, da es hierzu nicht bloß auf den Werth der vorhergehenden Näherungsbrüche, sondern auf die Werthe der Zähler und der Nenner selbst ankommt.

§. 102. Differenzen der Näherungsbrüche.

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}}{b_{n-1} b_n}$$

$$= \frac{a_{n-1} (b_{n-1} q_n + b_{n-2} p_n) - b_{n-1} (a_{n-1} q_n + a_{n-2} p_n)}{b_{n-1} b_n}$$

$$= \frac{p_n (a_{n-1} b_{n-2} - a_{n-2} b_{n-1})}{b_{n-1} b_n}$$

$$= \frac{- p_n (a_{n-2} b_{n-1} - a_{n-1} b_{n-2})}{b_{n-1} b_n}$$

Es ist also allgemein

$$a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} = - p_n (a_{n-2} b_{n-1} - a_{n-1} b_{n-2})$$

Da nun $a_1 b_2 - a_2 b_1 = p_1 p_2$ ist (§. 101)

so ist $a_2 b_3 - a_3 b_2 = - p_1 p_2 p_3$

$$a_3 b_4 - a_4 b_3 = + p_1 p_2 p_3 p_4$$

folglich allgemein

$$a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} = (-1)^n p_1 p_2 p_3 \dots p_n$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} = (-1)^n \frac{p_1 p_2 p_3 \dots p_n}{b_{n-1} b_n}$$

§. 103. Sind insbesondere alle Gliedzähler und alle Gliedenenner positive Zahlen, so sind alle Näherungsbrüche, alle ihre Zähler und alle ihre Nenner positive Zahlen; ferner sind dann die Differenzen der auf einander folgenden Näherungsbrüche abwechselnd positiv und negativ (§. 102). Ferner ergibt sich, was von besonderer Wichtigkeit ist, daß diese Differenzen ihrem absoluten Werthe nach fortlaufend abnehmen. Denn die absoluten Werthe der auf einander folgenden Differenzen sind

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_n}{b_{n-1} b_n}$$

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_{n+1}}{b_n b_{n+1}}$$

Ihre Differenz also

$$\begin{aligned} \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{b_{n-1} b_n} - \frac{p_1 p_2 \dots p_{n+1}}{b_n b_{n+1}} &= \frac{b_{n+1} \cdot p_1 p_2 \dots p_n - b_{n-1} \cdot p_1 p_2 \dots p_{n+1}}{b_{n-1} b_n b_{n+1}} \\ &= \frac{p_1 p_n p_3 \dots p_n (b_{n+1} - b_{n-1} p_{n+1})}{b_{n-1} b_n b_{n+1}} \end{aligned}$$

Es ist aber $b_{n+1} = b_n q_{n+1} + b_{n-1} p_{n+1}$ folglich $b_{n+1} - b_{n-1} p_{n+1}$ eine positive Zahl, also die obige Differenz positiv.

Es ergibt sich hieraus, daß die Reihe der Näherungsbrüche in 2 Klassen zerfällt, in die von ungeradem, und die von geradem Stellenzeiger, oder, wie sie auch genannt werden, in die von ungrader und die von grader Ordnung. Jeder, der der ersten Klasse angehört, ist, wie sich aus Obigem ergibt, größer, wie jeder, der der 2ten angehört; die von ungrader Ordnung nehmen fortwährend ab, die von grader Ordnung fortwährend zu. Ist der Kettenbruch endlich, so fällt sein wahrer Werth mit dem letzten Näherungsbruche zusammen und liegt zwischen je 2 auf einander folgenden Näherungsbrüchen. Ist der Kettenbruch unendlich, so liegt sein vollständiger Werth ebenfalls zwischen je 2 auf einander folgenden Näherungsbrüchen, vorausgesetzt, daß der unendliche Kettenbruch gegen einen bestimmten Werth konvergirt. Daß dies aber unter den gemachten Voraussetzungen immer statt findet, läßt sich folgendermaßen beweisen:

Der Näherungsbruch $\frac{a_n}{b_n}$ ist $=$

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{p_1 p_2}{b_1 b_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{b_2 b_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{b_3 b_4} + \dots \pm \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{b_{n-1} b_n}$$

also ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} - \frac{p_1 p_2}{b_1 b_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{b_2 b_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{b_3 b_4} + \dots$$

vorausgesetzt, daß diese Reihe konvergiert. Dies findet aber nach §. 97, 2 statt, denn die Glieder sind abwechselnd positiv und negativ, und ihre absoluten Werthe nehmen fortwährend ab und konvergiren gegen 0. Dies letztere folgt daraus, daß der Quotient der absoluten Werthe zweier auf einander folgenden Glieder, das frühere Glied als Zähler genommen, immer um eine endliche GröÙe > 1 ist. Dieser Quotient ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\frac{p_1 p_2 \dots p_n}{b_{n-1} b_n}}{\frac{p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1}}{b_n b_{n+1}}} &= \frac{b_{n+1}}{b_{n-1} p_{n+1}} = \frac{b_n q_{n+1} + b_{n-1} p_{n+1}}{b_{n-1} p_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{b_n q_{n+1}}{b_{n-1} p_{n+1}} \end{aligned}$$

Die Zahl $\frac{b_n q_{n+1}}{b_{n-1} p_{n+1}}$ ist immer positiv und wird nie unendlich klein.

§. 104. Folgerungen für den besonders wichtigen Fall, daß alle Gliedzähler $= 1$ sind.

1. Die allgemeine Form der Gliedbrüche ist

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \dots$$

Die allgemeine Form des Kettenbruchs

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots$$

2. Die auf einander folgenden Näherungsbrüche sind

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{q_1}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 q_2}{b_1 q_2 + 1}$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{a_2 q_3 + a_1}{b_2 q_3 + b_1}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n-1} q_n + a_{n-2}}{b_{n-1} q_n + b_{n-2}}$$

Die allgemeine rekurrende Form

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n-1} q_n + a_{n-2}}{b_{n-1} q_n + b_{n-2}}$$

3. Es ist $a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} = (-1)^n$

also $= \pm 1$. Daraus folgt für diesen Fall, daß $a_{n-1} b_n$ und $a_n b_{n-1}$ relative Primzahlen sind (§. 23.), daß also insbesondere auch a_{n-1} und b_{n-1} , ebenso a_n und b_n relative Primzahlen sind (§. 23.), die Näherungsbrüche also immer in irreductibler Form ausgedrückt sind.

Ferner $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} = \pm \frac{1}{b_{n-1} b_n}$

Hieraus ergibt sich, daß die Näherungsbrüche von Kettenbrüchen der vorliegenden Form ein ganz vorzügliches Recht auf den Namen Näherungsbrüche haben, indem dieselben bei den kleinsten Zahlen die größte Näherung geben; d. h. mit andern Worten, wenn $s < a_n$ und $t < b_n$, so liegt $\frac{s}{t}$ weiter von dem Werthe

des Kettenbruchs entfernt, als $\frac{a_n}{b_n}$.

Denn es ist dann

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{s}{t} = \frac{ta_{n-1} - sb_{n-1}}{b_{n-1}t}$$

Der Zähler dieses Bruches ist nothwendig mindestens $= 1$ (wenn nicht $\frac{s}{t} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$, und dann versteht sich unsere Behauptung von selbst) und der Nenner ist $< b_{n-1} b_n$, also ist dem abso-

luten Werthe nach $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{s}{t} > \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n}$

$\frac{s}{t}$ liegt also nicht zwischen den beiden auf einander folgenden

Näherungsbrüchen $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ und $\frac{a_n}{b_n}$, ist demnach weiter von

dem wahren Werthe des Kettenbruches entfernt, wie $\frac{a_n}{b_n}$

§. 105. Grad der Näherung für Kettenbrüche, deren Gliedzähler sämmtlich $= 1$ sind.

Bezeichnet man den Vollwerth des Kettenbruches

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+2}} + \dots$$

mit x , und den vollständigen Quotienten oder die Ergänzung

$$\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+2}} + \frac{1}{q_{n+3}} + \dots$$

mit $\frac{1}{y}$, so ist

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}q_n + a_{n-2}}{b_{n-1}q_n + b_{n-2}}$$

$$x = \frac{a_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{y}\right) + a_{n-2}}{b_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{y}\right) + b_{n-2}}$$

$$= \frac{y(a_{n-1}q_n + a_{n-2}) + a_{n-1}}{y(b_{n-1}q_n + b_{n-1}) + b_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n y + a_{n-1}}{b_n y + b_{n-1}}$$

Folglich ist

$$x - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n b_n y + a_{n-1} b_n - a_n b_n y - a_n b_{n-1}}{b_n(b_n y + b_{n-1})}$$

$$= \frac{\pm 1}{b_n(b_n y + b_{n-1})}$$

Da $y > 1$ ist, so ist also $\frac{a_n}{b_n}$ von x um weniger verschieden, als um $\frac{1}{b_n^2}$; bezeichnet also d eine Zahl, welche < 1 ist, so ist die Differenz, welche den Grad der Näherung angiebt, $= \frac{\pm d}{b_n^2}$.

§. 106. Wenn zu dem Kettenbruch eine ganze Zahl k addirt ist, wie es sehr oft vorkommt, so hat derselbe die allgemeine Form

$$\frac{a}{b} = k + \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} + \dots$$

Auch für diesen Fall ergeben sich leicht die Näherungsbrüche. Es ist dann

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} = k + \frac{p_1}{q_1} = \frac{kq_1 + p_1}{q_1}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{k\left(q_1 + \frac{p_2}{q_2}\right) + p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2}} = \frac{q_2(kq_1 + p_1) + kp_2}{q_1q_2 + p_2}$$

$$= \frac{a_1q_2 + kp_2}{b_1q_2 + p_2}$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1\left(q_2 + \frac{p_3}{q_3}\right) + kp_2}{b_1\left(q_2 + \frac{p_3}{q_3}\right) + p_2} = \frac{q_3(a_1q_2 + kp_2) + a_1p_3}{q_3(b_1q_2 + p_2) + b_1p_3}$$

$$= \frac{a_2q_3 + a_1p_3}{b_2q_3 + b_1p_3}$$

Von hier ab tritt also wieder dieselbe Form des Näherungsbruches hervor wie früher. Die früher aus derselben abgeleiteten Folgerungen finden also auch hier uneingeschränkt statt.

(Der Näherungsbruch $\frac{a_n}{b_n}$ ist $=$

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{p_1 p_2}{b_1 b_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{b_2 b_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{b_3 b_4} + \dots \pm \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{b_{n-1} b_n}$$

also ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} - \frac{p_1 p_2}{b_1 b_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{b_2 b_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{b_3 b_4} + \dots$$

vorausgesetzt, daß diese Reihe konvergirt. Dies findet aber nach §. 97, 2 statt, denn die Glieder sind abwechselnd positiv und negativ, und ihre absoluten Werthe nehmen fortwährend ab und konvergiren gegen 0. Dies letztere folgt daraus, daß der Quotient der absoluten Werthe zweier auf einander folgenden Glieder, das frühere Glied als Zähler genommen, immer um eine endliche GröÙe > 1 ist. Dieser Quotient ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\frac{p_1 p_2 \dots p_n}{b_{n-1} b_n}}{\frac{p_1 p_2 \dots p_n p_{n+1}}{b_n b_{n+1}}} &= \frac{b_{n+1}}{b_{n-1} p_{n+1}} = \frac{b_n q_{n+1} + b_{n-1} p_{n+1}}{b_{n-1} p_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{b_n q_{n+1}}{b_{n-1} p_{n+1}} \end{aligned}$$

Die Zahl $\frac{b_n q_{n+1}}{b_{n-1} p_{n+1}}$ ist immer positiv und wird nie unendlich klein.

§. 104. Folgerungen für den besonders wichtigen Fall, daß alle Gliedzähler $= 1$ sind.

1. Die allgemeine Form der Gliedbrüche ist

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \dots$$

Die allgemeine Form des Kettenbruchs

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots$$

2. Die auf einander folgenden Näherungsbrüche sind

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{q_1}$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 q_2}{b_1 q_2 + 1}$$

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{a_2 q_3 + a_1}{b_2 q_3 + b_1}$$

Die allgemeine rekurrirende Form

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_{n-1} q_n + a_{n-2}}{b_{n-1} q_n + b_{n-2}}$$

3. Es ist $a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1} = (-1)^n$

also $= \pm 1$. Daraus folgt für diesen Fall, daß $a_{n-1} b_n$ und $a_n b_{n-1}$ relative Primzahlen sind (§. 23.), daß also insbesondere auch a_{n-1} und b_{n-1} , ebenso a_n und b_n relative Primzahlen sind (§. 23.), die Näherungsbrüche also immer in irreductibler Form ausgedrückt sind.

Ferner $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} = \pm \frac{1}{b_{n-1} b_n}$

Hieraus ergibt sich, daß die Näherungsbrüche von Kettenbrüchen der vorliegenden Form ein ganz vorzügliches Recht auf den Namen Näherungsbrüche haben, indem dieselben bei den kleinsten Zahlen die größte Näherung geben; d. h. mit andern Worten, wenn $s < a_n$ und $t < b_n$, so liegt $\frac{s}{t}$ weiter von dem Werthe

des Kettenbruchs entfernt, als $\frac{a_n}{b_n}$.

Denn es ist dann

$$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{s}{t} = \frac{ta_{n-1} - sb_{n-1}}{b_{n-1}t}$$

Der Zähler dieses Bruches ist nothwendig mindestens $= 1$ (wenn nicht $\frac{s}{t} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$, und dann versteht sich unsere Behauptung von selbst) und der Nenner ist $< b_{n-1} b_n$, also ist dem abso-

luten Werthe nach $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{s}{t} > \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n}$

$\frac{s}{t}$ liegt also nicht zwischen den beiden auf einander folgenden

Näherungsbrüchen $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ und $\frac{a_n}{b_n}$, ist demnach weiter von dem wahren Werthe des Kettenbruches entfernt, wie $\frac{a_n}{b_n}$.

§. 105. Grad der Näherung für Kettenbrüche, deren Gliedzähler sämmtlich $= 1$ sind.
Bezeichnet man den Vollwerth des Kettenbruches

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+2}} + \dots$$

mit x , und den vollständigen Quotienten oder die Ergänzung

$$\frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+2}} + \frac{1}{q_{n+3}} + \dots$$

mit $\frac{1}{y}$, so ist

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}q_n + a_{n-2}}{b_{n-1}q_n + b_{n-2}}$$

$$x = \frac{a_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{y}\right) + a_{n-2}}{b_{n-1}\left(q_n + \frac{1}{y}\right) + b_{n-2}}$$

$$= \frac{y(a_{n-1}q_n + a_{n-2}) + a_{n-1}}{y(b_{n-1}q_n + b_{n-1}) + b_{n-1}}$$

$$= \frac{a_n y + a_{n-1}}{b_n y + b_{n-1}}$$

Folglich ist

$$x - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n b_n y + a_{n-1} b_n - a_n b_n y - a_n b_{n-1}}{b_n(b_n y + b_{n-1})}$$

$$= \frac{\pm 1}{b_n(b_n y + b_{n-1})}$$

Da $y > 1$ ist, so ist also $\frac{a_n}{b_n}$ von x um weniger verschieden, als um $\frac{1}{b_n^2}$; bezeichnet also d eine Zahl, welche < 1 ist, so ist die Differenz, welche den Grad der Näherung angiebt, $= \frac{\pm d}{b_n^2}$.

§. 106. Wenn zu dem Kettenbruch eine ganze Zahl k addirt ist, wie es sehr oft vorkommt, so hat derselbe die allgemeine Form

$$\frac{a}{b} = k + \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} + \dots$$

Auch für diesen Fall ergeben sich leicht die Näherungsbrüche. Es ist dann

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} &= \frac{a_1}{b_1} = k + \frac{p_1}{q_1} = \frac{kq_1 + p_1}{q_1} \\ \frac{a_2}{b_2} &= \frac{k\left(q_1 + \frac{p_2}{q_2}\right) + p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2}} = \frac{q_2(kq_1 + p_1) + kp_2}{q_1q_2 + p_2} \\ &= \frac{a_1q_2 + kp_2}{b_1q_2 + p_2} \\ \frac{a_3}{b_3} &= \frac{a_1\left(q_2 + \frac{p_3}{q_3}\right) + kp_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3}} = \frac{q_3(a_1q_2 + kp_2) + a_1p_3}{q_3(b_1q_2 + p_2) + b_1p_3} \\ &= \frac{a_2q_3 + a_1p_3}{b_2q_3 + b_1p_3} \end{aligned}$$

Von hier ab tritt also wieder dieselbe Form des Näherungsbruches hervor wie früher. Die früher aus derselben abgeleiteten Folgerungen finden also auch hier uneingeschränkt statt.

Die allgemeine rekurrende Form

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}q_n + a_{n-2}p_n}{b_{n-1}q_n + b_{n-2}p_n}$$

führt den Werth jedes Näherungsbruches auf die zunächst vorhergehenden zurück. Damit also die ganze Reihe der Näherungsbrüche gegeben sei, ist es nur nothwendig, daß 2 unmittelbar auf einander folgende gegeben seien. Es sind hier die beiden ersten

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{kq_1 + p_1}{q_1} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1q_2 + kp_2}{b_1q_2 + p_2}$$

welche für $k = 0$ in die §. 101 gegebenen Formen übergehen. Es liegt aber sehr nahe, nach Maaßgabe der allgemeinen Form für $\frac{a_n}{b_n}$ diese auf weiter zurückgelegene Näherungsbrüche zurückzuführen.

Schreibt man nämlich nach Maaßgabe der allgemeinen Form

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1q_2 + a_0p_2}{b_1q_2 + b_0p_2}$$

$$\text{so ergibt sich } a_0 = k \quad b_0 = 1 \quad \frac{a_0}{b_0} = \frac{k}{1}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_0q_1 + a_{-1}p_1}{b_0q_1 + b_{-1}p_1}$$

$$\text{so ergibt sich } a_{-1} = 1 \quad b_{-1} = 0 \quad \frac{a_{-1}}{b_{-1}} = \frac{1}{0}$$

Man kann also der früher gefundenen Reihe der Näherungsbrüche noch 2 vorsetzen $\frac{1}{0}$ und $\frac{k}{1}$

welche sich leichter im Gedächtniß behalten lassen, als die beiden für $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ gefundenen Ausdrücke, und aus welchen sich alle Näherungsbrüche successive ableiten lassen. Für die in §. 100—105 aufgestellten Ausdrücke ist nur $k = 0$, in jeder andern Beziehung findet durchaus kein Unterschied statt.

§. 107. Anwendungen der Kettenbrüche.

Es kommen hier nur Kettenbrüche in Betracht, deren Gliedzähler sämtlich $= 1$ sind. (§. 104).

1. Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Kettenbruch.

Man wende auf Zähler und Nenner des Bruchs das Ver-

fahren zur Auffuchung des größten gemeinsamen Maaßes an, (S. 25), so sind die gefundenen Quotienten der Reihe nach die Gliednenner des Kettenbruchs, wenn der gegebene Bruch ein ächter ist. Ist der gegebene Bruch ein unächter, so ist der erste Quotient die ganze zum Kettenbruch addirte Zahl, welche in S. 106 mit k bezeichnet ist; die folgenden Quotienten sind der Reihe nach die Gliednenner.

Das Beispiel des S. 25 giebt

$$\frac{451}{649} = \frac{41}{59} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}$$

Die Näherungsbrüche sind $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{9}{13}, \frac{16}{23}, \frac{41}{59}$.

Dasselbe Beispiel ergiebt

$$\frac{59}{41} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$

Die Näherungsbrüche sind $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{13}{9}, \frac{23}{16}, \frac{59}{41}$.

2. Entwicklung einer irrationalen Quadratwurzel in einen Kettenbruch.

Es sei $x = \sqrt{a}$; man bezeichne die größte in $\sqrt{a}$ enthaltene Zahl mit k , so ist $x = k + \frac{\sqrt{a} - k}{1} = k + \frac{1}{x_1}$

so ist $x_1 = \frac{1}{\sqrt{a} - k} = \frac{\sqrt{a} + k}{a - k^2}$; man bezeichne die größte in $\frac{\sqrt{a} + k}{a - k^2}$ enthaltene ganze Zahl mit q_1 , so ist

$$x_1 = q_1 + \left(\frac{\sqrt{a} + k}{a - k^2} - q_1 \right) = q_1 + \frac{1}{x_2}$$

Da $\frac{1}{x_2} < 1$ ist, so $x_2 > 1$, also eine Zahl, mit welcher man in derselben Weise der Entwicklung fortfahren kann.

Beispiel

$$x = \sqrt{28} = 5 + \frac{\sqrt{28} - 5}{1} \quad k = 5$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{28} - 5} = \frac{\sqrt{28} + 5}{3} = 3 + \frac{\sqrt{28} - 4}{3}; \quad q_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{3}{\sqrt{28} - 4} = \frac{\sqrt{28} + 4}{4} = 2 + \frac{\sqrt{28} - 4}{4}; \quad q_2 = 2$$

$$x_3 = \frac{4}{\sqrt{28} - 4} = \frac{\sqrt{28} + 4}{3} = 3 + \frac{\sqrt{28} - 5}{3}; \quad q_3 = 3$$

$$x_4 = \frac{3}{\sqrt{28} - 5} = \frac{\sqrt{28} + 5}{1} = 10 + \frac{\sqrt{28} - 5}{1}; \quad q_4 = 10$$

Daß die Gliedbrüche sich von dieser Stelle an periodisch wiederholen, ist unmittelbar ersichtlich; die Entwicklung des Grundes und des Gesetzes dieser Periodicität, welche bei allen Kettenbruchentwicklungen irrationaler Quadratwurzeln eintritt, geht über die Grenze dieses Elementar-Lehrbuchs hinaus. Daß der Kettenbruch unendlich sein muß, folgt unmittelbar aus seiner Irrationalität.

Es ist also

$$\sqrt{28} = 5 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \dots$$

Die Näherungsbrüche sind $\frac{1}{0}, \frac{5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{37}{7}, \frac{127}{24}, \frac{1307}{247}, \dots$. Der Fehler beträgt bei dem letzten hier aufgestellten Näherungsbruche weniger als $\frac{1}{(247)^2}$ (§. 105.) d. h. der Grad der Näherung kommt überein, mit dem einer 5stelligen Decimalbruchsentwicklung. Der letzte Näherungsbruch ist als ein Bruch von grader Ordnung feiner als $\sqrt{28}$.

3. Entwicklung des gemeinen Logarithmus einer gegebenen Zahl in einen Kettenbruch.

Es sei $x = \log a$ so ist $a = 10^x$. Die größte in x enthaltene ganze Zahl sei k so ist

$$a = 10^{k + \frac{1}{x_1}}$$

wo $x_1 > 1$ ist. Es ist also

$$a = 10^k \cdot 10^{\frac{1}{x_1}}$$

$$\left(\frac{a}{10^k}\right)^{x_1} = 10$$

die größte in x_1 enthaltene ganze Zahl sei q_1 , so ist

$$\left(\frac{a}{10^k}\right)^{q_1 + \frac{1}{x_2}} = 10$$

wo $x_2 > 1$ ist. Es ist also

$$\left(\frac{a}{10^k}\right)^{q_1} \cdot \left(\frac{a}{10^k}\right)^{\frac{1}{x_2}} = 10$$

$$\frac{a}{10^k} = \left(\frac{10^{kq_1+1}}{a^{q_1}}\right)^{x_2}$$

Mit dieser Gleichung operire man in der vorigen Weise fort.

Beispiel.

$$x = \log 2$$

$$2 = 10^x = 10^{0+\frac{1}{x_1}} = 10^{\frac{1}{x_1}} \quad k = 0$$

$$2^{x_1} = 10 = 2^{3+\frac{1}{x_2}} = 8 \cdot 2^{\frac{1}{x_2}} \quad q_1 = 3$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{x_2} = 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{x_3}} = \frac{125}{64} \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{x_3}} \quad q_2 = 3$$

$$\left(\frac{128}{125}\right)^{x_3} = \frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^{9+\frac{1}{x_4}} \quad q_3 = 9$$

Die Entwicklung geht ins Unendliche fort, da $\log 2$ irrational ist.

$$\log 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$$

Die Näherungsbrüche sind

$$\frac{1}{0} \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{28}{93} \dots$$

Der Fehler beträgt weniger als $\left(\frac{1}{93}\right)^2$. Man findet das auch

durch Verwandlung von $\frac{28}{93}$ in einen Decimalbruch und Vergleichung desselben mit dem Tafellogarithmus.

$$\frac{28}{93} = 0,301075 \dots$$

$$\log 2 = 0,3010300 \dots$$

Diese Art der Berechnung von Logarithmen ist namentlich für große Zahlen ungemein beschwerlich.

Achtes Capitel.

Von den Permutationen und Combinationen.

§. 108. Erklärung. Wenn mehrere Dinge in irgend einer Ordnung zusammengestellt sind, so kann man sich vorstellen, daß sie ihre Plätze mit einander vertauschen. Es kann die Frage entstehen, wie viel verschiedene Stellungen die Dinge durch solche Platzvertauschungen einnehmen können. Die Frage nach der Anzahl dieser möglichen Stellungen ist offenbar eine rein mathematische, bei welcher von jeder sonstigen Beziehung oder Bedeutung der betrachteten Dinge abstrahirt wird. Sie kann freilich noch anderweitiges mathematisches Interesse haben, wenn nämlich die betrachteten Dinge noch anderweitig Gegenstände mathematischer Betrachtung sind; wie z. B. die Frage: Wie viel vierstellige dekadische Zahlen lassen sich aus den 4 Ziffern 3, 5, 7, 8 bilden? Dies hat jedoch auf die hier vorliegende Frage ebenso wenig Einfluß, als wenn die Dinge irgend eine andere bürgerliche, gewerbliche oder sonstige Bedeutung hätten.

In dieser abstrakten Auffassung nennt man die Dinge, um deren Versetzung es sich handelt: Elemente, und jede Stellung derselben gegen einander: eine Permutation. Man bezeichnet die Elemente entweder durch Buchstaben oder durch Ziffern. Da man, in welcher Anordnung auch immer die Elemente der Permutation zusammengestellt sein mögen, die Plätze derselben numerirt denken und somit auf eine einfache Reihenfolge zurückführen kann, so kann man jede Permutation durch Nebeneinanderstellung der Elemente bildlich darstellen.

So ist abede ein Bild für jede Permutation aus den 5 Elementen a, b, c, d, e.

§. 109. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist nur von n abhängig. Bezeichnet man dieselbe mit P_n so ist

$$P_n = n P_{n-1}$$

Denn wenn zu $n-1$ Elementen ein ntes hinzutritt, so kann dieses in jeder Permutation der $n-1$ Elemente n verschiedene Stellungen einnehmen.

Da nun $P_1 = 1$
so ist $P_2 = 1 \cdot 2$
 $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$
 $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

§. 110. Darstellung aller Permutationen aus n Elementen.

1. Sämmtliche Permutationen aus den beiden Elementen a und b sind

1. ab
2. ba

2. Sämmtliche Permutationen aus den 3 Elementen a, b, c sind

- | | | |
|----------|----------|----------|
| 1. abc | 3. bca | 5. cab |
| 2. acb | 4. bac | 6. cba |

Sie sind gebildet, indem von jeder Permutation zur folgenden durch Platzvertauschung zweier Elemente übergegangen ist. Angefangen ist mit den beiden letzten Elementen der ersten Permutation; dann ist durch Platzvertauschung des ersten und dritten Elements aus der zweiten Permutation die dritte gebildet, und aus dieser die vierte, indem wieder die beiden letzten Elemente vertauscht sind; aus der vierten ist wieder die fünfte gebildet durch Vertauschung des ersten Elementes mit dem letzten, und aus dieser die sechste durch Vertauschung der beiden letzten Elemente.

3. Sämmtliche Permutationen aus 4 Elementen a, b, c, d sind:

- | | | | |
|-----------|------------|------------|------------|
| 1. $abcd$ | 7. $bdca$ | 13. $cabd$ | 19. $dcba$ |
| 2. $abdc$ | 8. $bdac$ | 14. $cadb$ | 20. $dcab$ |
| 3. $acdb$ | 9. $bcad$ | 15. $cbda$ | 21. $dbac$ |
| 4. $acbd$ | 10. $bcda$ | 16. $cbad$ | 22. $dbca$ |
| 5. $adbc$ | 11. $badc$ | 17. $cdab$ | 23. $dacb$ |
| 6. $adcb$ | 12. $bacd$ | 18. $cdba$ | 24. $dabc$ |

Aus der ersten Permutation leitet man die 5 nächsten ab, indem man das erste Element seine Stellung unverändert behalten läßt und die 3 letztern nach 2. permutirt; aus 6. leitet man 7. ab, indem man das erste und letzte Element ihre Plätze vertauschen läßt; aus 7. leitet man wieder die 5 nächstfolgenden ab, indem man dem ersten Elemente seinen Platz läßt, und die 3 andern nach 2. vollständig permutirt. So läßt man nach einander jedes der 4 Elemente in die erste Stelle rücken, und permutirt die 3 übrigen nach 2.

4. Hierin ist vollständig das Prinzip ausgesprochen, nach welchem alle Permutationen aus n Elementen dargestellt werden können. Auch folgt hieraus der Satz des §. 109.

Beispiel. Wie viel verschiedene vierstellige dekadische Zahlen lassen sich aus den 4 Ziffern 3, 5, 7, 8 bilden? Und welche sind es?

§. 111. Faßt man unter den Permutationen aus n Elementen alle diejenigen in eine Gruppe zusammen, in welcher je $n-p$ Elemente dieselbe Stellung haben, die p übrigen Elemente dagegen alle möglichen gegenseitigen Stellungen einnehmen, so ist die Anzahl der zu jeder Gruppe gehörigen Permutationen offenbar

$$P_p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p$$

und die Anzahl der Gruppen

$$\frac{P_n}{P_p} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (p+1)$$

Sind unter den n Elementen p gleiche, so daß eine Platzvertauschung unter diesen keine neue Permutation bildet, so fallen alle Permutationen einer Gruppe in eine Permutation zusammen. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter welchen p gleiche sind, reducirt sich also auf

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p}$$

Findet sich unter den n Elementen eine Gruppe von p gleichen Elementen, eine 2te Gruppe von q andern unter sich gleichen Elementen, u. s. w., so reducirt sich die Anzahl der Permutationen auf

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q}$$

Beispiel. Wie viel verschiedene fünfstellige dekadische Zahlen lassen sich aus den 5 Ziffern 3, 3, 2, 7, 7 bilden; und welche sind es?

§. 112. Erklärung. Aus gegebenen Elementen lassen sich irgend welche zusammenfassen; zu welchem Zwecke dies etwa geschieht, davon wird hier abgesehen. In diesem abstrakten Sinne nennt man jede solche Zusammenstellung von Elementen eine Combination.

Beispiele. Wenn gefragt wird, wie viel dreiziffrige Zahlen sich bilden lassen, deren Ziffern in der Reihe 4, 5, 6, 7, 8 vorkommen, so ist dies eine Frage nach einer Anzahl von Combinationen je dreier Elemente, die sich aus 5 Elementen bilden lassen. Die Aufgabe, jene dekadischen Zahlen darzustellen, ist keine andre, als die, diese Combinationen darzustellen. — Wenn gefragt wird, wie viel Maasse, die Produkte von je 2 Primzahlen sind, in der Zahl $420 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ enthalten sind, so ist dies eine Frage nach einer Anzahl von Combinationen je zweier Elemente aus jenen 4 Elementen; die Aufgabe, jene Maasse aufzufinden, ist keine andere als die, diese Combinationen darzustellen.

Man sieht sogleich, daß diese 2 Beispiele 2 verschiedene Arten von Combinationen vorführen. In dem ersten Beispiele ist es gestattet, dasselbe Element in derselben Combination zu wiederholen; bei dem zweiten ist dies nicht der Fall; man unterscheidet danach Combinationen mit Wiederholung und Combinationen ohne Wiederholung.

Noch in anderer Beziehung führen die 2 Beispiele 2 verschiedene Arten von Combinationen vor. In dem ersten Beispiele sind Combinationen für verschieden zu achten, wenn sie auch ganz

dieselben Elemente und jedes gleich oft enthalten, wenn nur die Stellung der Elemente verschieden ist, im zweiten ist dies nicht der Fall. Man unterscheidet danach Combinationen mit Versetzung und Combinationen ohne Versetzung. Die Combinationen mit Versetzung nennt man auch Variationen.

Durch Zusammenfassung beider Eintheilungsarten erhält man 4 Klassen von Combinationen.

Eine Combination von p Elementen nennt man eine Combination p ter Ordnung; eine Combination erster Ordnung heißt auch eine Union, zweiter Ordnung eine Ambe, dritter Ordnung eine Terna u. s. w.

I. Combinationen mit Wiederholung mit Versetzung.

§. 113. Man hat alle Unionen aus n Elementen $a, b, c, d \dots$ in diesen Elementen selbst. Ihre Anzahl ist n .

Man erhält alle Amben, indem man an jede Union jedes Element anhängt; die Anzahl der Amben ist also n^2 .

Man erhält alle Ternen, indem man an jede Ambe jedes Element anhängt; die Anzahl der Ternen ist also n^3 .

Man erkennt hieraus, wie man alle Combinationen höherer Ordnungen von den niederen aufsteigend erhält; ferner, daß die Anzahl der Combinationen p ter Ordnung aus n verschiedenen Elementen n^p ist.

II. Combinationen ohne Wiederholung mit Versetzung.

§. 114. Man hat alle Unionen aus n Elementen, $a, b, c, d \dots$ in diesen Elementen selbst. Ihre Anzahl ist n .

Man erhält alle Amben, indem man jeder Union jedes nicht in ihr enthaltene Element anhängt. Die Anzahl der Amben ist also $n(n-1)$.

Man erhält alle Ternen, indem man jeder Ambe jedes nicht in ihr enthaltene Element anhängt. Die Anzahl der Ternen ist also $n(n-1)(n-2)$.

Man erkennt hieraus, wie man alle Combinationen höherer Ordnungen von den niederen aufsteigend erhält; ferner, daß die Anzahl der Combinationen p ter Ordnung aus n verschiedenen Elementen $n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$

ist. Aus dieser Zahlform ergiebt sich, daß für $p = n$, die Anzahl der Combinationen $= P_n$, und für $p > n$ die Anzahl der Combinationen $= 0$ ist; zwei Folgerungen, welche sich auch unmittelbar aus der Erklärung dieser Combinationsart ergeben.

III. Combinationen ohne Wiederholung ohne Versetzung.

§. 115. Diese Combinationsart unterscheidet sich von der vorigen nur dadurch, daß in derselben alle diejenigen Combinationen der vorigen Art einander gleich zu achten sind, in welchem dieselben Elemente vorkommen, ohne Rücksicht auf ihre Stellung.

§. 111. Faßt man unter den Permutationen aus n Elementen alle diejenigen in eine Gruppe zusammen, in welcher je $n-p$ Elemente dieselbe Stellung haben, die p übrigen Elemente dagegen alle möglichen gegenseitigen Stellungen einnehmen, so ist die Anzahl der zu jeder Gruppe gehörigen Permutationen offenbar

$$P_p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p$$

und die Anzahl der Gruppen

$$\frac{P_n}{P_p} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (p+1)$$

Sind unter den n Elementen p gleiche, so daß eine Platzvertauschung unter diesen keine neue Permutation bildet, so fallen alle Permutationen einer Gruppe in eine Permutation zusammen. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen, unter welchen p gleiche sind, reducirt sich also auf

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p}$$

Findet sich unter den n Elementen eine Gruppe von p gleichen Elementen, eine 2te Gruppe von q andern unter sich gleichen Elementen, u. s. w., so reducirt sich die Anzahl der Permutationen auf

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot q}$$

Beispiel. Wie viel verschiedene fünfstellige dekadische Zahlen lassen sich aus den 5 Ziffern 3, 3, 2, 7, 7 bilden; und welche sind es?

§. 112. Erklärung. Aus gegebenen Elementen lassen sich irgend welche zusammenfassen; zu welchem Zwecke dies etwa geschieht, davon wird hier abgesehen. In diesem abstrakten Sinne nennt man jede solche Zusammenstellung von Elementen eine Combination.

Beispiele. Wenn gefragt wird, wie viel dreiziffrige Zahlen sich bilden lassen, deren Ziffern in der Reihe 4, 5, 6, 7, 8 vorkommen, so ist dies eine Frage nach einer Anzahl von Combinationen je dreier Elemente, die sich aus 5 Elementen bilden lassen. Die Aufgabe, jene dekadischen Zahlen darzustellen, ist keine andre, als die, diese Combinationen darzustellen. — Wenn gefragt wird, wie viel Maasse, die Produkte von je 2 Primzahlen sind, in der Zahl $420 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ enthalten sind, so ist dies eine Frage nach einer Anzahl von Combinationen je zweier Elemente aus jenen 4 Elementen; die Aufgabe, jene Maasse aufzufinden, ist keine andere als die, diese Combinationen darzustellen.

Man sieht sogleich, daß diese 2 Beispiele 2 verschiedene Arten von Combinationen vorführen. In dem ersten Beispiele ist es gestattet, dasselbe Element in derselben Combination zu wiederholen; bei dem zweiten ist dies nicht der Fall; man unterscheidet danach Combinationen mit Wiederholung und Combinationen ohne Wiederholung.

Noch in anderer Beziehung führen die 2 Beispiele 2 verschiedene Arten von Combinationen vor. In dem ersten Beispiele sind Combinationen für verschieden zu achten, wenn sie auch ganz

dieselben Elemente und jedes gleich oft enthalten, wenn nur die Stellung der Elemente verschieden ist, im zweiten ist dies nicht der Fall. Man unterscheidet danach Combinationen mit Versetzung und Combinationen ohne Versetzung. Die Combinationen mit Versetzung nennt man auch Variationen.

Durch Zusammenfassung beider Eintheilungsarten erhält man 4 Klassen von Combinationen.

Eine Combination von p Elementen nennt man eine Combination p ter Ordnung; eine Combination erster Ordnung heißt auch eine Union, zweiter Ordnung eine Umbe, dritter Ordnung eine Terne u. s. w.

I. Combinationen mit Wiederholung mit Versetzung.

§. 113. Man hat alle Unionen aus n Elementen $a, b, c, d \dots$ in diesen Elementen selbst. Ihre Anzahl ist n .

Man erhält alle Umben, indem man an jede Union jedes Element anhängt; die Anzahl der Umben ist also n^2 .

Man erhält alle Ternen, indem man an jede Umbe jedes Element anhängt; die Anzahl der Ternen ist also n^3 .

Man erkennt hieraus, wie man alle Combinationen höherer Ordnungen von den niederen aufsteigend erhält; ferner, daß die Anzahl der Combinationen p ter Ordnung aus n verschiedenen Elementen n^p ist.

II. Combinationen ohne Wiederholung mit Versetzung.

§. 114. Man hat alle Unionen aus n Elementen, $a, b, c, d \dots$ in diesen Elementen selbst. Ihre Anzahl ist n .

Man erhält alle Umben, indem man jeder Union jedes nicht in ihr enthaltene Element anhängt. Die Anzahl der Umben ist also $n(n-1)$.

Man erhält alle Ternen, indem man jeder Umbe jedes nicht in ihr enthaltene Element anhängt. Die Anzahl der Ternen ist also $n(n-1)(n-2)$.

Man erkennt hieraus, wie man alle Combinationen höherer Ordnungen von den niederen aufsteigend erhält; ferner, daß die Anzahl der Combinationen p ter Ordnung aus n verschiedenen Elementen $n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)$

ist. Aus dieser Zahlform ergiebt sich, daß für $p = n$, die Anzahl der Combinationen $= P_n$, und für $p > n$ die Anzahl der Combinationen $= 0$ ist; zwei Folgerungen, welche sich auch unmittelbar aus der Erklärung dieser Combinationsart ergeben.

III. Combinationen ohne Wiederholung ohne Versetzung.

§. 115. Diese Combinationsart unterscheidet sich von der vorigen nur dadurch, daß in derselben alle diejenigen Combinationen der vorigen Art einander gleich zu achten sind, in welchem dieselben Elemente vorkommen, ohne Rücksicht auf ihre Stellung

Bei Combinationen pter Ordnung fallen also jedesmal so viel Combinationen der vorigen Art in je eine zusammen, als sich aus p verschiedenen Elementen Permutationen bilden lassen; d. h. die Anzahl der Combinationen ist

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}$$

Wenn $p = n$ ist, so reducirt sich diese Zahl auf 1; wenn $p > n$ ist, so wird sie $= 0$; zwei Folgerungen, welche sich auch unmittelbar aus der Erklärung dieser Combinationsart ergeben.

Man hat alle Unionen aus n Elementen a, b, c, d in diesen Elementen selbst; ihre Anzahl ist n .

Man erhält alle Amben, indem man jeder Union jedes Element anhängt, welches in der (anfänglichen, übrigens willkürlichen) Reihe der Elemente später kommt, als das Element der Union. Daraus folgt, daß aus der letzten Union keine Ambe hervorgeht.

Man erhält alle Ternen indem man jeder Ambe jedes Element anhängt, welches in der Reihe der Elemente später kommt, als das zweite Element der Ambe. Demnach giebt es keine Terne, welche mit einem der beiden letzten Elemente beginnt.

Man erkennt hieraus, wie man alle Combinationen höherer Ordnungen von den niederen aufsteigend erhält; man sieht insbesondere, daß keine Combination pter Ordnung mit einem der $p-1$ letzten Elemente beginnt.

IV. Combinationen mit Wiederholung ohne Versetzung.

§ 116. Die Combinationen dieser Art unterscheiden sich von denen der ersten Art eben so, wie die der dritten Art von denen der zweiten. Doch aber läßt sich hier die Anzahl der Combinationen nicht so leicht ableiten, wie in §. 115, weil die Permutationszahl wegen der in den Combinationen vorkommenden Wiederholungen nicht überall dieselbe ist.

Man hat alle Unionen aus n Elementen $a, b, c, d \dots$ in diesen Elementen selbst; ihre Anzahl ist n .

Um alle Amben zu bilden, füge man zu den n Elementen noch ein neues k hinzu, und bilde aus den $(n+1)$ Elementen $a, b, c, d \dots k$ die Amben ohne Wiederholung ohne Versetzung,

deren Anzahl $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ ist. Alle diese Combinationen zerfallen in 2

Klassen, 1. in solche, die das fremde Element k nicht enthalten; 2. in solche, welche das Element k enthalten. Die Combinationen der ersten Klasse bleiben ungeändert; sie umfaßt alle diejenigen Amben, in welchen 2 verschiedene Elemente vorkommen. Ist $n=1$ so ist diese erste Klasse nicht vorhanden. In den Combinationen der zweiten Klasse setze man an die Stelle von k dasjenige Element, mit welchem k verbunden ist; (aus der Ambe ak entsteht die aa); diese Klasse umfaßt alle die Amben, welche durch ein einziges Element gebildet sind. — So hat man alle Amben dieser Combinationsart aus den gegebenen Elementen.

Um alle Ternen zu bilden, füge man zu den n gegebenen Elementen noch 2 neue k, l hinzu, und bilde aus den $(n+2)$ Elementen $a, b, c \dots k, l$ die Ternen ohne Wiederholung ohne Versetzung nach §. 115, deren Anzahl $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ist. Diese Combinationen zerfallen in 3 Klassen: 1. in solche, welche keins der Elemente k, l enthalten; 2. in solche, welche eins der Elemente k, l enthalten; 3. in solche, welche die beiden Elemente k, l enthalten. Die Combinationen der ersten Klasse bleiben unverändert; sie umfaßt alle diejenigen Ternen, in welchen 3 verschiedene Elemente vorkommen. Ist $n=2$ oder $=1$, so ist diese erste Klasse nicht vorhanden. Die Combinationen der zweiten Klasse gehören in Gruppen von je 2 zusammen, so daß die derselben Gruppe angehörigen in den beiden ersten Elementen übereinstimmen, und sich nur durch das dritte Element k, l unterscheiden; an seine Stelle substituirt man in jeder Gruppe der Reihe nach die an den beiden ersten Stellen vorkommenden Elemente; (aus den beiden Ternen abk und abl entstehen die beiden aba und abb). Diese Klasse umfaßt alle diejenigen Ternen, in welchen 2 verschiedene Elemente vorkommen. Ist $n=1$, so ist auch diese zweite Klasse nicht vorhanden. — Die der dritten Klasse enthalten eins der gegebenen Elemente und die Umbe kl , an deren Stelle man immer die aus dem gegebenen Elemente mit sich selbst gebildete Umbe setzt. (Aus der Terne akl entsteht die aaa). Diese Klasse umfaßt alle diejenigen Ternen, welche aus 1 Element gebildet sind. — So hat man alle Ternen der verlangten Art.

Um die Quaternen zu bilden, füge man zu den n gegebenen Elementen noch 3 neue k, l, m hinzu, und bilde aus den $(n+3)$ Elementen $a, b, c \dots k, l, m$ alle Quaternen ohne Wiederholung ohne Versetzung nach §. 115, deren Anzahl $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ ist. Diese Quaternen zerfallen in 4 Klassen: 1. in solche, welche keins der fremden Elemente enthalten; 2. in solche, welche eins der fremden Elemente enthalten; 3. in solche, welche zwei der fremden Elemente enthalten; 4. in solche, welche alle drei fremden Elemente enthalten. — Die der ersten Klasse bleiben unverändert; sie enthält alle diejenigen Quaternen, welche aus 4 verschiedenen Elementen bestehen. Ist $n=3$ oder $=2$ oder $=1$, so ist diese erste Klasse nicht vorhanden. — Die der zweiten Klasse gehören in Gruppen von je 3 Combinationen zusammen, so daß die derselben Gruppe angehörigen in den 3 ersten Elementen übereinstimmen, und sich nur durch das vierte Element (k, l, m) unterscheiden; an seine Stelle substituirt man der Reihe nach die 3 ersten Elemente der Combinationen der betreffenden Gruppe. (Aus den 3 Quaternen $abck, abcl, abcm$ entstehen die 3 $abca, abcb, abcc$) Diese Klasse enthält alle diejenigen Quaternen, welche aus 3 verschiedenen Elementen gebildet sind. Ist $n=2$ oder $=1$, so ist auch diese zweite Klasse nicht vorhanden. Die der dritten Klasse

gehören in Gruppen von je $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ Combinationen zusammen

(nämlich so vielen, als sich Amben ohne Wiederholung ohne Versetzung aus den 3 Elementen k, l, m bilden lassen), so daß die derselben Gruppe angehörigen in den beiden ersten Elementen übereinstimmen, und sich nur die Combinationen zweiter Ordnung aus den Elementen k, l, m unterscheiden, welche die beiden letzten Stellen einnehmen; an ihre Stelle substituirt man der Reihe nach die Combinationen zweiter Ordnung mit Wiederholung ohne Versetzung, welche sich aus den zwei ersten Elementen der Combinationen der betreffenden Gruppe bilden lassen, ihre Anzahl ist $\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}$

also ebenfalls $= 3$. (Aus den 3 Quaternen $abkl, abkm, ablm$ entstehen die 3: $abab, abaa, abbb$). Diese Klasse enthält alle diejenigen Quaternen, welche aus 2 verschiedenen Elementen bestehen. Ist $n=1$ so ist auch diese dritte Klasse nicht vorhanden. — Die Combinationen der vierten Klasse enthalten 1 der gegebenen Elemente und die Combination klm , an deren Stelle man die aus dem betreffenden Element mit sich selbst gebildete Terne setzt. (Aus der Quaterne $aklm$ entsteht die $aaaa$). Diese Klasse enthält alle diejenigen Quaternen, welche durch ein einziges Element gebildet sind. — So hat man alle Quaternen dieser Art aus n Elementen.

Man erkennt hieraus durch Induction das Prinzip, nach welchem alle Combinationen dieser Art gebildet werden, und zugleich das Gesetz, daß die Anzahl der Combinationen pter Ordnung aus n Elementen.

$$\frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}$$

ist. Man kann diese Induction durch das sogenannte Kästner'sche Verfahren zu einer vollständigen machen; dadurch nämlich, daß man nachweist, daß, wenn dasselbe für alle Werthe von p gültig ist, die kleiner als eine bestimmte Zahl s sind, es auch für $p = s$ gültig ist. Denn wenn dies bewiesen ist, so geht daraus, daß es für $p = 2$ gültig ist, hervor, daß es für jeden Werth von p gilt. Der fragliche Beweis ist folgender:

Um die Combinationen ster Ordnung aus n Elementen zu bilden, fügt man zu den n gegebenen Elementen noch $s-1$ fremde hinzu, und aus diesen $(n+s-1)$ Elementen bilde man die Combinationen ster Ordnung ohne Wiederholung, ohne Versetzung, deren Anzahl nach §. 115

$$\frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+s-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}$$

ist. Diese Combinationen liefern durch einfache Substitutionen die verlangten. Alle aus den $n+s-1$ Elementen gebildeten Combinationen zerfallen nämlich in s Klassen, je nach der Anzahl fremder Elemente, welche in ihnen vorkommen. (Einzelne dieser Klassen,

und zwar die $s-n$ ersten, fallen ganz aus, wenn $s > n$ ist; doch macht dies keinen wesentlichen Unterschied). Greift man die Klasse heraus, deren Combinationen q fremde, also $s-q$ gegebene Elemente enthalten, so zerfallen diese in verschiedene Gruppen, und zwar gehören diejenigen in 1 Gruppe zusammen, welche in den $s-q$ Elementen übereinstimmen. Die Anzahl der Combinationen jeder

Gruppe ist $\frac{(s-1)(s-2)\dots(s-q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q}$ d. h. der Anzahl der Com-

binationen q ter Ordnung ohne Wiederholung, ohne Versetzung, welche sich aus den $s-1$ fremden Elementen bilden lassen. In jeder Gruppe substituirt man an die Stelle der Combinationen aus den fremden Elementen der Reihe nach die Combinationen q ter Ordnung mit Wiederholung, ohne Versetzung der $s-q$ gegebenen Elemente, welche in den Combinationen der gegebenen Elemente vorkommen; die Anzahl dieser Combinationen ist übereinstimmend

nach dem Obigen $\frac{(s-q)(s-q+1)\dots(s-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q}$. Dadurch

hat man alle Combinationen der verlangten Art, welche $s-q$ verschiedene Elemente enthalten; und, indem man q nach der Reihe alle Werthe von 0 bis $s-1$ beilegt, alle Combinationen der verlangten Art.

Beispiel. Die Combinationen dritter Ordnung aus den 5 Elementen a, b, c, d, e zu bilden.

$abc = abc$	$ade = ade$	$bel = bec$	$cdl = cdd$
$abd = abd$	$adk = ada$	$bde = bde$	$cek = cec$
$abe = abe$	$adl = add$	$bdk = bdb$	$cel = cee$
$abk = aba$	$aek = aea$	$bdl = bdd$	$ckl = ccc$
$abl = abb$	$ael = aee$	$bek = beb$	$dek = ded$
$acd = acd$	$akl = aaa$	$bel = bee$	$del = dee$
$ace = ace$	$bcd = bcd$	$bkl = bbb$	$dcl = ddd$
$ack = aca$	$bce = bce$	$cde = cde$	$ekl = eee$
$acl = aco$	$bck = bcb$	$cdk = cdc$	

Die Newton'sche Binominalformel.

§. 117. In §. 73. ist die 2te und die 3te Potenz einer zweigliedrigen Größe (eines Binoms) in Form einer Summe dargestellt. Diese beiden Umformungen sind nur specielle Fälle eines allgemeinen Satzes, nach welchem

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n}{1} a b^{n-1} + b^n$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Dieser Satz ist zuerst von Newton aufgestellt und bewiesen; daher der Name. Das Gesetz der Entwicklung besteht darin, daß jedes Glied ein Produkt zweier ganzen Potenzen von a und b als Hauptgröße enthält, in welchen die Summe der Exponenten von a und b gleich n ist, daß die Exponenten von a von Glied zu Glied, von n ab um 1 abnehmen

bis zu 0, während die Exponenten von b von 0 ab von Glied zu Glied um 1 wachsen bis zu n , so daß die Anzahl der Glieder $= n + 1$ ist; die Coefficienten sind vom zweiten ab die Combinationen für Combinationen ohne Wiederholung ohne Bersehung erster, 2ter, 3ter bis n ter Ordnung aus n Elementen.

Beweis. Die Potenz $(a + b)^n$ ist, da n eine absolute ganze Zahl ist, ein Produkt aus n zweigliedrigen Faktoren, deren jeder $= a + b$ ist. Um dieses Produkt in Form einer Summe darzustellen, hat man auf jede mögliche Weise aus jedem Faktor 1 Glied zu nehmen, die Elemente jeder Combination von n aus den verschiedenen Faktoren genommenen Gliedern zu einem Produkte zu verbinden, und alle diese Produkte zu addiren. Alle diese Produkte erhält man, indem man aus den beiden Elementen a, b die sämtlichen Combinationen n ter Ordnung mit Wiederholung mit Bersehung bildet, deren Anzahl nach §. 113. 2^n ist, und die Elemente jeder Combination durch Multiplikation verbindet. Diese 2^n Glieder lassen sich aber auf wenigere reduciren, indem man die gleichnamigen, oder vielmehr gleichen, zu einem Gliede vereinigt. —

1. Ein Glied besteht aus dem n mal gesetzten Faktor a ; es ist also $= a^n$.

2. Es kommen Glieder vor, in denen der Faktor a $(n-1)$ mal, der Faktor b 1mal vorkommt; ihre Anzahl ist offenbar gleich der Permutationszahl von n Elementen, unter welchen $n-1$ einander gleich sind; diese Zahl ist nach §. 111.

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)} = \frac{n}{1}$$

Diese Glieder lassen sich also in das eine zusammenfassen $\frac{n}{1} a^{n-1} b$.

3. Es kommen Glieder vor, in denen der Faktor a $(n-2)$ mal, der Faktor b 2mal vorkommt; ihre Anzahl ist offenbar gleich der Permutationszahl von n Elementen, welche in 2 Gruppen von $n-2$ und 2 gleichen Elementen zerfallen. Diese Zahl ist

$$\text{nach §. 111} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot 1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \quad \text{Diese}$$

$$\text{Glieder lassen sich also in das eine zusammenfassen:}$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2$$

Hiernach tritt das angeführte Gesetz schon klar hervor; um es allgemein zu machen, fasse man die Glieder ins Auge in welchen der Faktor a $(n-s)$ mal, der Faktor b s mal vorkommt; ihre Anzahl ist offenbar gleich der Permutations-Zahl von n Elementen, welche in 2 Gruppen von $n-s$ und s gleichen Elementen zerfallen, diese Anzahl ist nach §. 111

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-s) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot s} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot s}$$

Diese Glieder lassen sich in das eine zusammenfassen

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots s} \frac{n-s}{a} \frac{s}{b}$$

Anmerkung. Eine besonders wichtige Anwendung der Combinationslehre liegt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine allgemeine Behandlung derselben geht über die Grenzen dieses Bruches weit hinaus. Einzelne einfache Aufgaben aus derselben finden sich in den meisten Aufgabensammlungen, unter andern in Meier Hirsch pag. 301 und folg., an welchen sich die einfachsten Begriffe derselben leicht nachweisen lassen.

Zweiter Abschnitt

Die Combinationen

Man erhält dadurch folgende Regeln:

§. 118. Eine Combination ist eine Zusammenfassung von mehreren Elementen, die in einer bestimmten Ordnung angeordnet sind. Die Anzahl der Combinationen, die aus n Elementen von der Ordnung s gebildet werden können, ist gegeben durch die Formel:

$$C(n, s) = \frac{n!}{s!(n-s)!}$$

Die Formel zeigt, dass die Anzahl der Combinationen von n Elementen von der Ordnung s gleich der Anzahl der Permutationen von n Elementen, die durch die Division mit der Anzahl der Permutationen der s Elemente und der (n-s) Elemente geteilt wird.

Beispiel: Wieviele Combinationen von 5 Elementen von der Ordnung 3 gibt es? Hier ist n=5 und s=3, also:

$$C(5, 3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

Es gibt also 10 Combinationen von 5 Elementen von der Ordnung 3.

Die Combinationen von n Elementen von der Ordnung s sind:

1. Die Combinationen, die aus n Elementen von der Ordnung s gebildet werden können, sind:
2. Die Combinationen, die aus n Elementen von der Ordnung s gebildet werden können, sind:
3. Die Combinationen, die aus n Elementen von der Ordnung s gebildet werden können, sind:

Größen. Bezeichnen a , b , c die Maaßzahlen der Katheten und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so wird die zwischen ihnen bestehende Abhängigkeit durch die nicht identische Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ dargestellt. Die Planimetrie, einzelne Capitel der Arithmetik, besonders aber die Trigonometrie bieten sehr viele Beispiele von nicht identischen Gleichungen dar.

In der Folge ist nur von nicht identischen Gleichungen die Rede; sie werden hier immer unter dem Namen Gleichungen verstanden.

§. 119. Umformungen der Gleichungen.

I. Es bestehe zwischen den Zahlen a , b , c (welche Zahlen von jeder beliebigen Form und Größe bezeichnen) die Abhängigkeit

$$a + b = c \quad (1)$$

so ist dieselbe Abhängigkeit, vermöge der Erklärung der Subtraction, auch dargestellt durch die Gleichungen

$$b = c - a \quad (2)$$

$$a = c - b \quad (3)$$

Man erhält dadurch folgende Regel:

Man kann jedes Glied einer Gleichung durch Umkehrung des Vorzeichens von einer Seite des Gleichheitszeichens auf die andere bringen, ohne das Wesen der Gleichung zu ändern.

II. Es bestehe zwischen den Zahlen a , b , c (welche Zahlen von jeder beliebigen Form und Größe bezeichnen) die Abhängigkeit

$$ab = c \quad (1)$$

so ist dieselbe Abhängigkeit, vermöge der Erklärung der Division, auch dargestellt durch die Gleichungen

$$b = \frac{c}{a} \quad (2)$$

$$a = \frac{c}{b} \quad (3)$$

Man erhält dadurch folgende Regel:

Man kann beide Seiten einer Gleichung mit derselben Zahl multipliciren oder durch dieselbe Zahl dividiren, ohne das Wesen der Gleichung zu ändern, vorausgesetzt, daß die Zahl nicht Null oder unendlich ist.

§. 120. Erklärungen. Eine Gleichung in Bezug auf eine darin vorkommende Größe auflösen, heißt die Gleichung so umformen, daß diese Größe in ihrer Abhängigkeit von den übrigen isolirt dargestellt ist.

In §. 119 sind unter I. und II. die Gleichungen (1) in Bezug auf c , die Gleichungen (2) in Bezug auf b , die Gleichungen (3) in Bezug auf a aufgelöst.

Die Größe, in Bezug auf welche die Gleichung aufgelöst werden soll, wird die Unbekannte genannt, weil in sehr vielen Fällen eine Gleichung aufgelöst wird, um eine nur mittelbar durch ein Abhängigkeitsverhältniß zu gegebenen Zahlen gegebene Zahl in einfachster Form als unmittelbar gegeben darzustellen. — Man be-

Ihre praktische Wichtigkeit beruht darin, daß im bürgerlichen und gewerblichen Leben sehr häufig gleiche Verhältnisse vorkommen.

Die allgemeine Form einer Proportion ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1)$$

$$\text{oder } a : b = c : d$$

Die Zahlen a, b, c, d heißen Glieder der Proportion; a und c heißen Vorderglieder, b und d Hinterglieder; a und d äußere Glieder, b und c mittlere Glieder. Zwei Glieder, welche in beiden Verhältnissen gleiche Stellungen einnehmen, heißen homologe Glieder; zwei Glieder, welche in beiden Verhältnissen ungleiche Stellungen einnehmen, heißen anhomologe Glieder. Eine Proportion, in welcher 2 anhomologe Glieder gleich sind, heißt eine stetige.

Die durch die Gleichungen (1) dargestellte Abhängigkeit wird auch dargestellt durch die Produktgleichung

$$ad = bc \quad (2)$$

In Worten: das Produkt der äußern Glieder ist gleich dem Produkt der mittleren Glieder.

Sie wird auch dargestellt durch die Proportionen

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{b}{d} & a : c &= b : d \\ \frac{d}{b} &= \frac{c}{a} & d : b &= c : a \end{aligned} \quad (3)$$

In Worten: Man kann je 2 anhomologe Glieder mit einander vertauschen.

Die erste Gleichung (3) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} \pm 1 &= \frac{b}{d} \pm 1 \\ \frac{a \pm c}{c} &= \frac{b \pm d}{d}; & (a \pm c) : c &= (b \pm d) : d \\ \frac{a \pm c}{b \pm d} &= \frac{c}{d} = \frac{a}{b}; & (a \pm c) : (b \pm d) &= c : d = a : b. \end{aligned} \quad (4)$$

d. h. mit Bezug auf die Proportionen (1):

Wenn 2 Verhältnisse einander gleich sind, so ist das Verhältniß der Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder gleich jedem der beiden Verhältnisse.

Dasselbe ergibt sich für mehr als 2 gleiche Verhältnisse, wenn die Vorderglieder in irgend einer Weise durch Addition und Subtraction verbunden werden, und die Hinterglieder in entsprechender Weise. — Wenn mehr als 2 Verhältnisse einander gleich sind, und man stellt dies dadurch dar, daß man die gleichen Verhältnisse durch Gleichheitszeichen verbunden neben einander schreibt, so nennt man diese Verbindung von Proportionen eine fortlaufende Proportion. — Aus dem Vorigen ergibt sich insbesondere: In einer

fortlaufenden Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede. Darauf beruht die Gesellschaftsrechnung, eine Vertheilungsrechnung nach gegebenen Verhältnißzahlen.

Aus (4) ergibt sich

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d}$$

und entsprechend

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d}$$

d. h. in Worten?

Ein Verhältniß heißt aus mehreren Verhältnissen zusammengesetzt, wenn es gleich dem Produkt dieser Verhältnisse ist.

Gleichungen des ersten Grades mit 2 Unbekannten.

§. 123. Durch 2 von einander unabhängige, einander nicht widersprechende Gleichungen sind 2 der darin vorkommenden Größen, in Bezug auf welche die Gleichungen vom ersten Grade und so beschaffen sind, daß in keinem Gliede ein Produkt dieser Größen vorkommt, in ihrer Abhängigkeit von den übrigen vollkommen bestimmt.

Man nennt 2 Gleichungen von einander unabhängig, wenn sie Darstellungen verschiedener Abhängigkeiten sind, so daß also nicht die eine aus der andern durch Umformung abgeleitet werden kann.

Beweis. Die allgemeine Form eines Systems zweier Gleichungen ersten Grades mit 2 Unbekannten, die x und y heißen mögen, ist

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Man löse beide Gleichungen in Bezug auf dieselbe Unbekannte, z. B. y auf, so erhält man

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2} \quad (3)$$

Wenn die beiden gegebenen Gleichungen einander nicht widersprechen, so ist diese Gleichung möglich; wenn sie von einander unabhängig sind, so ist sie nicht identisch, kann also in Bezug auf x aufgelöst werden. Man erhält

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (4)$$

In derselben Weise, wie hier x , kann auch y in seiner Abhängigkeit von den übrigen Größen dargestellt werden, indem man die gegebenen Gleichungen zunächst in Bezug auf x auflöst, die beiden dafür erhaltenen Ausdrücke gleich setzt, und die erhaltene Gleichung in Bezug auf y auflöst. Man erhält dadurch

$$\frac{c_1 - b_1 y}{a_1} = \frac{c_2 - b_2 y}{a_2} \quad (5)$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (6)$$

Die in (4) und (6) gegebenen Auflösungswerte für x und y sind die einzig möglichen, denn die beiden Gleichungen (3) und (5) zusammen stellen vollkommen dieselbe Abhängigkeit dar, wie (1) und (2) zusammen. Es folgt dies daraus, daß (1) und (2) sich so aus (3) und (5) herleiten lassen, wie diese aus jenen hergeleitet sind.

Um die Gleichung (1) aus (3) und (5) abzuleiten, löse man diese beiden in Bezug auf c_2 auf, so erhält man

$$c_2 = \frac{b_2 (c_1 - a_1 x)}{b_1} + a_2 x = \frac{a_2 (c_1 - b_1 y)}{a_1} + b_2 y$$

$$a_1 b_2 c_1 - a_1^2 b_2 x + a_1 a_2 b_1 x = a_2 b_1 c_1 - a_2 b_1^2 y + a_1 b_1 c_2 y$$

$$a_1 x (a_2 b_1 - a_1 b_2) + b_1 y (a_2 b_1 - a_1 b_2) = c_1 (a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

Diese Gleichung ist übereinstimmend mit der Gleichung (1), wenn $a_2 b_1 - a_1 b_2$ von Null verschieden ist. Diese Bedingung ist aber in den oben vorangestellten enthalten. — Denn, wenn

$a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0$ wäre, so wäre $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; damit also die

Gleichungen (1) und (2) nicht widersprechende wären, müßte auch

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

sein; wenn aber dies der Fall wäre, so wären die Gleichungen nicht von einander unabhängig; demgemäß würden in diesem Falle auch die Ausdrücke (4) und (6) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

Um die Gleichung (2) aus (3) und (5) abzuleiten, löst man diese in Bezug auf c_1 auf, und verfährt weiter wie oben.

§. 124. Erklärung. Auflösungsmethoden.

In §. 123. ist mit dem Beweise des Satzes zugleich ein Weg gezeigt, wie man ein System von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten auflösen kann.

Im Allgemeinen besteht das Verfahren darin, daß man aus den 2 Gleichungen, in welchen die Unbekannten vermisch vorkommen, 2 Gleichungen ableitet, in welcher sie getrennt sind. Dieses Trennen der Unbekannten nennt man Eliminiren.

Es sind besonders 3 Eliminationsmethoden zu merken.

1. Die Eliminationsmethode des §. 123 besteht darin, daß man beide Gleichungen in Bezug auf dieselbe Unbekannte auflöst, und die beiden dafür gefundenen Ausdrücke einander gleich setzt, wodurch man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält. Man nennt diese Methode die Gleichstellungsmethode.

2. Die Substitutionsmethode besteht darin, daß man eine der beiden Gleichungen in Bezug auf die eine Unbekannte auflöst, den dafür gefundenen Ausdruck in die 2te Gleichung substituirt, und diese Gleichung in Bezug auf die eine noch darin vorkommende Unbekannte auflöst.

3. Die Coefficientenmethode besteht darin, daß man 2 Zahlen von der Beschaffenheit sucht, daß wenn man die Glieder der einen Gleichung mit der einen, die Glieder der andern Gleichung mit der andern dieser beiden Zahlen multiplicirt, die Coefficienten der einen Unbekannten in beiden Gleichungen einander gleich werden, so daß man durch Subtraction der beiden Gleichungen eine Gleichung erhält, welche nur eine der beiden Unbekannten enthält.

Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten.

§. 125. Durch n von einander unabhängige, einander nicht widersprechende Gleichungen sind n der darin vorkommenden Größen, in Bezug auf welche die Gleichungen vom ersten Grade und so beschaffen sind, daß in keinem Gliede ein Produkt irgend welcher dieser Größen vorkommt, in ihrer Abhängigkeit von den übrigen vollständig bestimmt.

Beweis nach Anleitung des §. 123. Auch treten hier dieselbe Eliminationsmethoden auf, wie in §. 124.

1. Die Gleichstellungsmethode besteht darin, daß man alle n Gleichungen in Bezug auf dieselben Unbekannte auflöst, und die dafür gefundenen Ausdrücke einander gleichsetzt, wodurch man das System von n Gleichungen mit n Unbekannten auf ein System von $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten zurückgeführt hat, welches man in gleicher Weise weiter zurückführen kann.

2. Die Substitutionsmethode besteht darin, daß man eine der n Gleichungen in Bezug auf eine der Unbekannten auflöst, und den dafür gefundenen Ausdruck in die $n-1$ anderen Gleichungen substituirt, wodurch man das System von n Gleichungen mit n Unbekannten auf ein System von $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten zurückgeführt hat.

3. Die Coefficientenmethode besteht darin, daß man n Zahlen von solcher Beschaffenheit sucht, daß wenn man jede der n Gleichungen mit einer dieser n Zahlen multiplicirt, $n-1$ der n Unbekannten so verändert werden, daß für jede dieser $n-1$ Unbekannten die Summe der Coefficienten $= 0$ ist, so daß durch Addition der n Gleichungen 1 Gleichung mit 1 Unbekannten entsteht.

Es sei z. B. ein System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, deren allgemeine Form ist

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= k_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Man multiplicire die 3 Gleichungen mit den zunächst unbestimmten nach obiger Bedingung zu bestimmenden Zahlen, m_1, m_2, m_3 , so gehen sie über in

$$\left. \begin{aligned} m_1a_1x + m_1b_1y + m_1c_1z &= m_1k_1 \\ m_2a_2x + m_2b_2y + m_2c_2z &= m_2k_2 \\ m_3a_3x + m_3b_3y + m_3c_3z &= m_3k_3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Soll nun das System der Gleichungen in Bezug auf x aufgelöst werden, so sind m_1, m_2, m_3 so zu bestimmen, daß

$$\left. \begin{aligned} m_1b_1 + m_2b_2 + m_3b_3 &= 0 \\ m_1c_1 + m_2c_2 + m_3c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dies ist auf unendlich viele Arten möglich, da durch die beiden Gleichungen (3) die Zahlen m_1, m_2, m_3 nicht vollständig bestimmt sind. Wohl aber sind ihre gegenseitigen Verhältnisse bestimmt, denn die Gleichungen (3) lassen sich umformen in die

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_2}{m_1} b_2 + \frac{m_3}{m_1} b_3 &= -b_1 \\ \frac{m_2}{m_1} c_2 + \frac{m_3}{m_1} c_3 &= -c_1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und aus ihnen ergiebt sich nach §. 124

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_2}{m_1} &= \frac{b_3c_1 - b_1c_3}{b_2c_3 - b_3c_2} \\ \frac{m_3}{m_1} &= \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{b_2c_3 - b_3c_2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn man setzt

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= b_2c_3 - b_3c_2 \\ m_2 &= b_3c_1 - b_1c_3 \\ m_3 &= b_1c_2 - b_2c_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Substituirt man diese Ausdrücke und addirt, so erhält man

$$\begin{aligned} x (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) \\ = k_1b_2c_3 - k_1b_3c_2 + k_2b_3c_1 - k_2b_1c_3 + k_3b_1c_2 - k_3b_2c_1 \\ x = \frac{k_1b_2c_3 - k_1b_3c_2 + k_2b_3c_1 - k_2b_1c_3 + k_3b_1c_2 - k_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1} \end{aligned}$$

In gleicher Weise läßt sich das System der 3 Gleichungen in Bezug auf y oder auf z auflösen.

Man ersieht hieraus leicht, wie die Coefficientenmethode sich auch für mehr als 3 Gleichungen gestaltet.

Es ist oft zweckmäßiger, die verschiedenen Auflösungsmethoden in geeigneter Weise mit einander zu verbinden, als eine derselben rein durchzuführen.

§. 126. Auflösung eines Systems von n Gleichungen durch die Determinante.

Alle 3 Auflösungsmethoden des §. 125 leiden an dem erheb-

lichen Mangel, daß sie die Auflösung eines Systems von n Gleichungen auf die Auflösung eines Systems von $n-1$ Gleichungen zurückführen, und dadurch sehr weitschweifig sind, sobald n eine größere Zahl ist. Von diesem Mangel ist die folgende Methode frei; zu ihrer Darstellung sind zuvor mehrere Entwicklungen erforderlich.

1. Die allgemeine Form eines Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten ist:

$$\begin{array}{rcl} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t + \dots & = & k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t + \dots & = & k_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t + \dots & = & k_3 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n x + b_n y + c_n z + d_n t + \dots & = & k_n \end{array}$$

2. Der allgemeine Auflösungswert für irgend eine der Unbekannten ist eine algebraische Verbindung der gegebenen Größen dieser Gleichungen. Er ist vorzugsweise abhängig von einer sogleich näher zu erklärenden algebraischen Verbindung der Coefficienten, welche man die Determinante des Systems von Gleichungen nennt.

3. Die Determinante ist ein Aggregat von $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ Gliedern, von denen jedes ein Produkt von n Coefficienten ist, und zwar in der Art, daß es als Faktoren einen Coefficienten von x , einen von y , einen von z u. s. w. enthält, so daß jedes die Form $abcd \dots$ hat, wo dann den $a, b, c, d \dots$ die besondern Indices beizulegen sind. Diese werden in folgender Weise bestimmt: Man bilde alle Permutationen aus den Elementen $1, 2, 3, 4 \dots$ in der S. 110 angegebenen Art, (so also, daß jede folgende Permutation aus der vorhergehenden durch Platzwechsel je zweier Elemente hervorgeht); die Elemente der auf diese Weise auftretenden $1.2.3\dots n$ Permutationen den Faktoren des Produkts $abcd \dots$ als Indices beilegt, und die so entstehenden Größen abwechselnd durch die Vorzeichen $\pm$ mit einander verbindet. Z. B. für ein System von 4 Gleichungen sind die Permutationen folgende

1234	2431	3124	4321
1243	2413	3142	4312
1342	2314	3241	4213
1324	2341	3214	4231
1423	2143	3412	4132
1432	2134	3421	4123

Demnach ist die Determinante des Systems von 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} & a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 + a_1 b_3 c_4 d_2 - a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_4 c_3 d_2 \\ & + a_2 b_4 c_3 d_1 - a_2 b_4 c_1 d_3 + a_2 b_3 c_1 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 + a_2 b_1 c_4 d_3 - a_2 b_1 c_3 d_4 \\ & + a_3 b_1 c_2 d_4 - a_3 b_1 c_4 d_2 + a_3 b_2 c_4 d_1 - a_3 b_2 c_1 d_4 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_3 b_4 c_2 d_1 \\ & + a_4 b_3 c_2 d_1 - a_4 b_3 c_1 d_2 + a_4 b_2 c_1 d_3 - a_4 b_2 c_3 d_1 + a_4 b_1 c_3 d_2 - a_4 b_1 c_2 d_3 \end{aligned}$$

4. Auf den ersten Blick ergibt sich, daß man von einer Permutati-

tion zur andern durch verschiedene Platzvertauschungen gelangen kann. Z. B. von der Permutation 1234 ist man zu der 2314 durch 8 Platzvertauschungen gelangt; man hätte zu derselben auch durch 2 Platzvertauschungen gelangen können, vermittelt der aus der ersten sich ergebenden Permutation 3214. Es fragt sich demnach, ob durch die obige Regel die Determinante vollständig bestimmt ist, insbesondere, ob mit der Bestimmung des Zeichens eines Gliedes, z. B. des ersten, die Zeichen aller Glieder vollständig bestimmt sind. Das Zeichen eines Gliedes bleibt bei der obigen Regel unbestimmt: wenn aber durch das Zeichen eines Gliedes nach der obigen Regel die Zeichen aller Glieder bestimmt sind, so kann die Determinante nur 2 entgegengesetzte absolut gleiche Werthe annehmen; eine Zweideutigkeit, welche, wie sich später ergibt, ohne Nachtheil ist.

5. Die in 4 aufgestellte Frage läßt sich sogleich auf folgende zurückführen: Wenn man von einer Permutation zu einer andern auf einem Wege durch eine grade oder durch eine ungrade Anzahl von Platzwechseln gelangt, wird dann auch auf jedem andern Wege entsprechend eine grade oder eine ungrade Anzahl von Platzwechseln erforderlich sein? Denn nach der obigen Regel stimmen diejenigen Glieder in ihren Vorzeichen überein, welche durch eine grade Anzahl von Platzwechseln der Indices in einander übergehen, diejenigen haben entgegengesetzte Vorzeichen, welche durch eine ungrade Anzahl von Platzwechseln in einander übergehen. Wenn also alle die verschiedenen Wege, die man einschlagen kann, um von einer Permutation zu einer andern zu gelangen, übereinstimmend eine grade Anzahl oder eine ungrade Anzahl von Platzwechseln erfordern, so werden sie keine Verschiedenheit der Resultate hervorbringen.

6. Wenn man von einer Permutation zu einer andern sowohl durch p als auch durch q Platzwechsel gelangen kann, so wird man auch von der einen Permutation durch die andere hierdurch zur ersten zurück durch $p+q$ Platzwechsel gelangen können. Wenn nun p und q übereinstimmend grade oder ungrade sind, so ist $p+q$ grade; ist aber eine der beiden Zahlen p und q grade, während die andre ungrade ist, so ist $p+q$ ungrade. Die Frage reducirt sich also darauf: Kann $p+q$ ungrade sein? oder: Kann man von einer Stellung der Elemente zu dieser Stellung zurück nur durch eine grade, oder auch durch eine ungrade Anzahl von Platzwechseln gelangen?

7. Die so eben aufgestellte Frage beantwortet sich leicht dahin, daß man nur durch eine grade Anzahl von Platzwechseln von einer Stellung der Elemente zu derselben Stellung zurückkehren kann.

Denn jeder Platzwechsel zwischen 2 Elementen läßt sich durch eine Reihe von Platzwechseln zwischen je 2 benachbarten Elementen ersetzen, und die Anzahl dieser Platzwechsel ist immer ungrade. Wenn nämlich zwischen den beiden zu vertauschenden Elementen n Elemente liegen, so sind $n+1$ Platzwechsel benachbarter Elemente nöthig, um das erste Element an die Stelle des zweiten zu bringen,

und dann noch n Platzwechsel, um das zweite Element an die Stelle des ersten zu bringen, so daß alle übrigen Elemente wieder ihre früheren Plätze einnehmen. Demnach, wird je 1 Platzwechsel durch $2n+1$ Platzwechsel benachbarten Elemente ersetzt: somit für das Resultat Nichts geändert, weil dadurch an die Stelle einer ungraden Anzahl von Platzwechseln eine ungrade Zahl, an die Stelle einer graden eine grade tritt. — Nun ist aber klar, daß, wenn man von einer Stellung der Elemente durch eine Reihe von Platzvertauschungen benachbarten Elemente zu derselben Stellung zurückkehren will, dazu eine grade Anzahl von Platzvertauschungen erforderlich ist: denn jede Platzvertauschung zweier benachbarten Elemente muß durch eine Platzvertauschung derselben Elemente in entgegengesetztem Sinne wieder aufgehoben werden.

8. Hieraus ergibt sich, daß die ganze Reihe der Permutationen in 2 Klassen zerfällt, der Art, daß man von jeder Permutation einer Klasse zu jeder Permutation derselben Klasse nur durch eine grade Anzahl von Platzwechseln, von jeder Permutation der einen Klasse zu jeder Permutation der andern Klasse nur durch eine ungrade Zahl von Platzwechseln gelangen kann.

Somit ist erwiesen, daß durch die obige Regel die Determinante vollständig bestimmt ist, sobald das Zeichen eines Gliedes bestimmt ist; giebt man diesem das entgegengesetzte, so gehen alle Glieder in die entgegengesetzten über, die Determinante also ebenfalls.

9. Haupteigenschaft der Determinante.

Wenn man in der Determinante an die Stelle aller a , oder aller b , oder aller c . . . einen andern Coefficienten mit dem entsprechenden Index substituirt, so wird die Determinante identisch $= 0$.

Substituirt man z. B. in der in (3) aufgestellten Determinante an die Stelle eines jeden a ein b mit entsprechendem Index, so treten alle Glieder paarweise zusammen, der Art, daß die Summe der Glieder eines jeden Paares nach der Substitution $= 0$ ist. So gehören z. B. die Glieder $+ a_3 b_2 c_4 d_1$ und $- a_2 b_3 c_4 d_1$ in ein solches Paar zusammen; sie gehen durch die vorgeschriebene Substitution über in $+ b_3 b_2 c_4 d_1$ und $- b_2 b_3 c_4 d_1$.

10. Die $1. 2. 3. \dots n$ Glieder der Determinante lassen sich in n Gruppen von je $1. 2. 3. \dots (n-1)$ Gliedern zusammen fassen, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben; so z. B., daß $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ die gemeinschaftlichen Faktoren der n Gruppen sind. Stellt man die Summe der Glieder, deren gemeinschaftlicher Faktor a_p ist, in Form eines Produktes dar, dessen einer Faktor a_p ist, und bezeichnet den andern Faktor mit $f(a_p)$ so läßt sich die Determinante auch so schreiben

$$a_1 f(a_1) + a_2 f(a_2) + a_3 f(a_3) + \dots + a_n f(a_n)$$

oder auch

$$b_1 f(b_1) + b_2 f(b_2) + b_3 f(b_3) + \dots + b_n f(b_n)$$

und so für jede andre Gruppe von Coefficienten.

Mit dieser Bezeichnung läßt sich der in (9) enthaltene Satz symbolisch so darstellen

$$\begin{aligned} b_1 f(a_1) + b_2 f(a_2) + b_3 f(a_3) + \dots + b_n f(a_n) &= 0 \\ c_1 f(a_1) + c_2 f(a_2) + c_3 f(a_3) + \dots + c_n f(a_n) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 f(b_1) + a_2 f(b_2) + a_3 f(b_3) + \dots + a_n f(b_n) &= 0 \\ c_1 f(b_1) + c_2 f(b_2) + c_3 f(b_3) + \dots + c_n f(b_n) &= 0 \end{aligned}$$

Und so für alle Gruppen von Coefficienten.

11. Auflösung eines Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten.

Multipliziert man, um x zu erhalten, die erste der Gleichungen (1) mit $f(a_1)$, die zweite mit $f(a_2)$, die dritte mit $f(a_3)$... die n te mit $f(a_n)$, und addirt die so umgeformten Gleichungen, so erhält man, wenn man die Determinante mit D bezeichnet nach (10)

$$\begin{aligned} x D &= k_1 f(a_1) + k_2 f(a_2) + k_3 f(a_3) + \dots + k_n f(a_n) \\ x &= \frac{k_1 f(a_1) + k_2 f(a_2) + k_3 f(a_3) + \dots + k_n f(a_n)}{D} \end{aligned}$$

Der Werth von x ist also gleich einem Bruche, dessen Nenner die Determinante ist, und dessen Zähler man erhält, wenn man in der Determinante an die Stelle jedes a das entsprechende k substituirt.

Ebenso ist der Werth von y gleich einem Bruche, dessen Nenner die Determinante ist, und dessen Zähler man erhält, wenn man an die Stelle jedes b das entsprechende k substituirt. U. s. w.

Allgemein: der Werth jedes Unbekannten ist gleich einem Bruch, dessen Nenner die Determinante ist, und dessen Zähler man erhält, wenn man in der Determinante an die Stelle jedes Coefficienten der betreffenden Unbekannten das bekannte Glied von der rechten Seite der entsprechenden Gleichung substituirt.

Hieraus geht hervor, daß mit dem Vorzeichen der Determinante, des Nenners, sich auch das Vorzeichen des Zählers in das entgegengesetzte verwandelt, wodurch die Zeichen-Zweideutigkeit der Determinante im Resultat verschwindet.

Man erkennt, daß diese Methode die Coefficientenmethode ist, mit der Bervollkommnung, daß die unbestimmten Coefficienten derselben hier durch ein einfaches Verfahren unmittelbar bestimmt werden.

Die Gleichungen zweiten Grades.

§. 127. Die allgemeine Form einer Gleichung zweiten Grades oder einer quadratischen Gleichung ist

$$a x^2 + b x = c \quad (1)$$

Diese Gleichung ist nur dann wirklich vom zweiten Grade

wenn a von 0 verschieden ist; dann aber kann man durch a dividiren, und man erhält

$$0 = (a)x^2 + bx + c \quad \text{oder} \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (2)$$

Bezeichnet man $\frac{b}{a}$ mit p und $-\frac{c}{a}$ mit q , so erhält man als neue allgemeine Form der Gleichungen zweiten Grades

$$x^2 + px = q \quad (3)$$

Auf diese Form muß jede quadratische Gleichung Behufs der Auflösung nach bekannten Gesetzen (§. 119) gebracht werden.

Ist insbesondere $p = 0$, so geht sie über in

$$x^2 = q$$

Die Gleichung heißt dann eine rein quadratische, und ergibt

$$x = \pm \sqrt{q}$$

Ist p von 0 verschieden, so heißt die Gleichung eine gemischt quadratische. Die linke Seite $x^2 + px$ läßt sich dann als der Anfang des Quadrates einer zweigliedrigen Größe betrachten, deren erstes Glied x ist; es muß dann px als das doppelte Produkt der beiden Glieder, p also als das doppelte zweite Glied angesehen werden; um also die linke Seite zu einem Quadrate zu

machen, muß man auf beiden Seiten $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ addiren; so erhält man

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

Die beiden Auflösungswerthe der quadratischen Gleichung nennt man Wurzeln derselben.

§. 128. Nähere Betrachtung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung.

Eine jede quadratische Gleichung hat 2 Wurzeln. Die beiden Wurzeln sind nur dann reell, wenn $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ positiv ist.

Sie haben gleiche Vorzeichen, wenn q negativ und seinem absoluten Werthe nach kleiner als $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ ist; und zwar sind sie negativ, wenn p positiv, positiv, wenn p negativ ist.

Sie haben entgegengesetzte Vorzeichen, wenn q positiv ist.

Die Summe der beiden Wurzeln ist $-p$, das Produkt derselben $-q$. Bezeichnet man die beiden Wurzeln mit α und β , so läßt sich die Gleichung (3) auch schreiben

$$\begin{aligned} x^2 - (\alpha + \beta) x &= -\alpha \beta \\ x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha \beta &= 0 \\ (x - \alpha)(x - \beta) &= 0 \end{aligned}$$

In dieser Form erkennt man den Grund davon, daß eine quadratische Gleichung immer 2 Wurzeln haben muß; denn ein Produkt zweier Faktoren kann auf doppelte Art $= 0$ werden, indem der eine oder der andre Faktor $= 0$ wird. Analoges findet für die algebraischen Gleichungen aller Grade statt. Aus dem Grunde schreibt man die Gleichungen bei allgemeiner Betrachtung in der Regel so, daß alle Glieder auf der einen Seite des Gleichheitszeichens stehen, auf der andern 0; in dieser Form nennt man die Gleichung auf Null reducirt.

§. 129. Gleichungen, deren Auflösung sich auf die Auflösung quadratischer Gleichungen zurückführen läßt.

1. Jede Gleichung, welche sich auf die Form

$$x^{2n} + px^n = q$$

bringen läßt, läßt sich in Bezug auf x^n auflösen, und ergibt

$$\begin{aligned} x^n &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\ x &= \sqrt[n]{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

2. Gleichungen von der Form

$$\sqrt{a + bx} + \sqrt{c + dx} + \sqrt{e + fx} = 0 \quad (1)$$

lassen sich auf quadratische zurückführen. Ist nämlich nicht anderweitig für jede der Wurzeln das Vorzeichen bestimmt, so verlangt die Auflösung der Gleichung (1) die Beantwortung der Frage:

Für welche Werthe von x wird einer der folgenden 4 Ausdrücke zu Null

$$\left. \begin{aligned} &+ \sqrt{a+bx} + \sqrt{c+dx} + \sqrt{e+fx} \\ &+ \sqrt{a+bx} + \sqrt{c+dx} - \sqrt{e+fx} \\ &+ \sqrt{a+bx} - \sqrt{c+dx} + \sqrt{e+fx} \\ &- \sqrt{a+bx} + \sqrt{c+dx} + \sqrt{e+fx} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wo unter $\sqrt{a+bx}$, $\sqrt{c+dx}$, $\sqrt{e+fx}$ die absoluten Werthe dieser Wurzeln verstanden sind. Diese Frage ist identisch mit der: Für welche Werthe von x wird das Produkt dieser 4 Ausdrücke $= 0$? Dieses Produkt ist aber:

$$\begin{aligned} &-(a+bx)^2 - (c+dx)^2 - (e+fx)^2 + 2(a+bx)(c+dx) \\ &+ 2(a+bx)(e+fx) + 2(c+dx)(e+fx) \end{aligned}$$

Die Gleichung (1) ist somit auf folgende zurückgeführt

$$\begin{aligned} &x^2(b^2 + d^2 + f^2 - 2bd - 2bf - 2df) \\ &+ 2x(ab + cd + ef - ad - af - bc - be - cf - de) \\ &+ (a^2 + c^2 + e^2 - 2ac - 2ae - 2ce) = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat 2 Wurzeln, welche 2 der 4 Ausdrücke unter (2) zu Null machen. Ist durch die Aufgabe, deren Ausdruck die Gleichung (1) ist, für jede der Wurzeln ein bestimmtes Zeichen vorgeschrieben, also vorgeschrieben, daß ein bestimmter der 4 Ausdrücke (2) zu Null werden soll, so ist zu untersuchen ob eine und welche der beiden Wurzeln diese Bedingung erfüllt.

In analoger Weise lassen sich Gleichungen behandeln, in welchen nicht wie in (1) 3 irrationale Glieder vorkommen, sondern nur 2, oder nur 1. Kommen aber mehr als 3 Glieder der Art vor, so kommt man auf eine Gleichung von höherem als dem 2ten Grade.

§. 130. Gleichungen zweiten Grades mit zwei oder mehreren Unbekannten.

Man behandelt solche Gleichungen nach der Gleichstellungs- oder der Substitutionsmethode. Eine allgemeine Betrachtung derselben führt über die Grenzen dieses Buches hinaus, da die Elimination im Allgemeinen auf Gleichungen von höherem, als dem zweiten Grade führt. In vielen besonderen Fällen führt sie auf Gleichungen zweiten Grades oder auf Gleichungen, deren Auflösung sich auf die Auflösung von Gleichungen des zweiten Grades zurückführen läßt; solche Aufgaben sind in den meisten Aufgabensammlungen in hinreichend großer Zahl zusammengestellt. Es finden sich darunter auch Gleichungen höherer Grade, deren Auflösung sich aber auf die Auflösung quadratischer Gleichungen zurückführen läßt.

Fundamentalsätze über algebraische Gleichungen überhaupt.

§. 131. 1. Eine Gleichung nten Grades hat die allgemeine Form:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + fx + g = 0 \quad (1)$$

2. Eine Gleichung nten Grades hat höchstens n Wurzeln. Denn es sei α eine solche Wurzel, so ist identisch

$$\alpha^n + a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2} + \dots + f\alpha + g = 0 \quad (2)$$

Die Gleichung (1) erleidet also keine wesentliche Veränderung, wenn man die Gleichung (2) von ihr subtrahirt; dadurch erhält man

$$(x^n - \alpha^n) + a(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + b(x^{n-2} - \alpha^{n-2}) + \dots + f(x - \alpha) = 0$$

oder

$$(x - \alpha) \{ x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \dots + E \} = 0 \quad (3)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite kann auf zweifache Art zu Null werden, nämlich dadurch, daß $x - \alpha$ oder daß $x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \dots + E$ zu Null wird. Die Gleichung (1) hat also höchstens eine Wurzel mehr als die Gleichung.

$$x^{n-1} + Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \dots + E = 0$$

folglich hat jede Gleichung n ten Grades höchstens 1 Wurzel mehr als eine Gleichung $(n-1)$ ten Grades. Da nun eine Gleichung 2ten Grades 2 Wurzeln hat, so hat eine Gleichung n ten Grades höchstens n Wurzeln.

3. Eine Gleichung n ten Grades hat, wenn n eine ungerade Zahl ist, wenigstens eine reelle Wurzel.

Denn wenn n ungerade ist, so giebt es immer unendlich viele Werthe von x , für welche

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots + fx + g \quad (1)$$

positiv, und unendlich viele Werthe von x , für welche derselbe Ausdruck negativ ist. Denn bezeichnet man die absoluten Werthe der Coefficienten mit $\alpha, \beta, \gamma \dots \kappa, \lambda$ so läßt sich immer eine absolute Zahl finden, welche für x substituirt

$$x^n > \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \dots + \kappa x + \lambda \quad (2)$$

macht. Bezeichnet man nämlich den größten der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \dots \kappa, \lambda$ mit μ , so wird die Bedingung (2) sicher erfüllt sein, wenn

$$x^n > \mu x^{n-1} + \mu x^{n-2} + \dots + \mu x + \mu \quad (3)$$

oder $x^n > \mu \frac{x^n - 1}{x - 1}$ ist. Die letzte Ungleichheit kann man schreiben

$$x^n > \frac{\mu x^n}{x-1} - \frac{\mu}{x-1} \quad (5)$$

Wenn $x > 1$ ist, so wird diese Bedingung erfüllt sein, wenn

$$x^n = \frac{\mu x^n}{x-1}$$

d. h. wenn $x = 1 + \mu$ ist. Hieraus geht sogleich hervor, daß (1) für $x = 1 + \mu$, (und wie man leicht erkennt, auch für jeden positiven Werth von x , der $> (1 + \mu)$ ist) positiv wird; daß (1) für $x = -(1 + \mu)$ (und für jeden negativen Werth von x , der absolut genommen $> (1 + \mu)$ ist) negativ wird. — Zwischen 2 Werthen von x aber von solcher Größe, daß (1) für den einen positiv, für den andern negativ wird, liegt mindestens 1 Werth von x , für welchen derselbe Ausdruck $= 0$ wird, da derselbe sich mit x stetig ändert.

Die Gleichungen dritten Grades.

§. 132. 1. Die allgemeine Form einer Gleichung dritten Grades oder einer kubischen Gleichung ist

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

Jede kubische Gleichung hat wenigstens eine reelle Wurzel (§. 131. 3).

Wenn α die eine reelle Wurzel der Gleichung (1) bezeichnet,

so ist $x - \alpha$ ein Maaß der Zahl $x^3 + ax^2 + bx + c$ (§. 131. 2). Die Gleichung (1) läßt sich also in der Form

$$(x - \alpha)(x^2 + \mu x + \nu) = 0$$

darstellen. Man erhält also noch 2 Wurzeln der gegebenen Gleichung, indem man die Gleichung

$$x^2 + \mu x + \nu = 0$$

aufloßt. Diese hat immer 2 Wurzeln; also hat jede kubische Gleichung drei Wurzeln, von denen entweder 1 reell, 2 imaginär, oder welche alle 3 reell sind.

2. Von der allgemeinen kubischen Gleichung sind die einfachsten Fälle die, wo b und c zugleich $= 0$ sind, oder wo c allein $= 0$ ist.

Wenn $b = 0$ und $c = 0$, so geht die Gleichung (1) über in

$$x^3 + ax^2 = 0$$

$$x^2(x + a) = 0$$

deren Wurzeln $-a, 0, 0$ sind.

Wenn $c = 0$, so geht die Gleichung (1) über in

$$x^3 + ax^2 + bx = 0$$

$$x(x^2 + ax + b) = 0$$

deren Wurzeln $-\frac{1}{2}a + \sqrt{-b + \frac{1}{4}a^2}$, $-\frac{1}{2}a - \sqrt{-b + \frac{1}{4}a^2}$ und 0 sind.

Besondere Betrachtung verdienen sodann die Fälle, wo a und b gleichzeitig $= 0$ sind, und der, wo $a = 0$ ist. Der besondere Fall, daß $b = 0$ ist, ohne daß $a = 0$ ist, erfordert keine besondere Betrachtung.

Demnach sind folgende 3 Formen zu betrachten:

$$\text{I. } x^3 + c = 0$$

$$\text{II. } x^3 + bx + c = 0$$

$$\text{III. } x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

§. 133. Die Gleichung

$$x^3 + c = 0 \quad (\text{I.})$$

ergiebt sogleich eine reelle Wurzel

$$x = \sqrt[3]{-c} = -\sqrt[3]{c}$$

Die beiden andern erhält man, indem man $x^3 + c$ durch $x + \sqrt[3]{c}$ dividirt, den Quotienten $= 0$ setzt, und die dadurch entstehende quadratische Gleichung auflöst. Man erhält so die beiden Wurzeln

$$x = -\sqrt[3]{c} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Ist $c = -1$, so erhält man als die 3 Wurzeln der Gleichung (I), welche dann in

$$x^3 = 1$$

übergeht:

$$x = 1 \quad x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Diese 3 Zahlformen nennt man die dritten Wurzeln der Einheit. — Jede Zahl hat 3 Kubikwurzeln, eine reelle und 2 ima-

ginäre; man erhält aus jeder einzelnen derselben alle 3, indem man die eine mit den Wurzeln der Einheit multiplicirt.

§. 134. Zur Auflösung der Gleichung

$$x^3 + b x + c = 0 \quad (\text{II.})$$
 gelangt man durch Betrachtung des Cubus eines Binoms.

Es sei $x = p + q$
 so ist $x^3 = (p + q)^3 = p^3 + 3 p^2 q + 3 p q^2 + q^3$
 $= p^3 + 3 p q (p + q) + q^3$
 $= p^3 + 3 p q x + q^3$
 $x^3 - 3 p q x - (p^3 + q^3) = 0$

Von dieser kubischen Gleichung kennt man eine Wurzel
 $x = p + q$
 und es kommt nur darauf an, diese Gleichung mit der II zu ver-
 gleichen, d. h. 2 Zahlen p und q zu finden, so daß

$b = -3 p q \quad c = -(p^3 + q^3)$
 Wenn 2 solche Zahlen gefunden sind, so ist $p + q$ eine Wurzel
 der Gleichung II. Es ergibt sich aus den beiden Bedingungs-
 gleichungen, daß

$$p = \sqrt[3]{\frac{-c + \sqrt{c^2 + \frac{4}{27} b^3}}{2}} \quad q = \sqrt[3]{\frac{-c - \sqrt{c^2 + \frac{4}{27} b^3}}{2}}$$

mithin

$$x = \sqrt[3]{\frac{-c + \sqrt{c^2 + \frac{4}{27} b^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-c - \sqrt{c^2 + \frac{4}{27} b^3}}{2}}$$

eine Wurzel der Gleichung (II). Man nennt diesen Ausdruck die
 Cardanische Formel. Diese Auflösung wurde nämlich durch
 Cardanus bekannt gemacht, nachdem sie kurz zuvor durch Ferro
 und Tartalea (im 16. Jahrh.) entdeckt worden war.

Man hat hierdurch eine reelle Wurzel der Gleichung II, wenn
 $c^2 + \frac{4}{27} b^3$ positiv ist; die beiden andern sind dann imaginär,
 wie in §. 135 gezeigt werden soll. Ebenso erhält man aus der
 Cardanischen Formel eine reelle Wurzel, wenn $c^2 + \frac{4}{27} b^3 = 0$
 ist; dann sind die beiden andern reell, wie in §. 136 gezeigt wer-
 den soll. Wenn endlich $c^2 + \frac{4}{27} b^3$ negativ ist, so erscheint die
 eben gefundene Wurzel unter imaginärer Form, indem beide Glie-
 der imaginär sind. In einzelnen Fällen fand schon Cardanus, daß
 die beiden Glieder sich so umformen ließen, daß die imaginären
 Glieder unter dem Cubik-Wurzelzeichen heraustraten und sich auf-
 hoben,*) und daß dann grade alle 3 Wurzeln reell waren. Eine

*) Es ist dies z. B. in der Gleichung

$$x^3 - 12 x + 9 = 0$$

möglich; die Cardanische Formel ergibt

$$x = \sqrt[3]{\frac{-9 + \sqrt{-175}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-9 - \sqrt{-175}}{2}}$$

solche Reduktion konnte er aber nicht allgemein ausführen, wie sie auch nicht in endlicher Form allgemein ausführbar ist. Dieser Fall wurde danach der irreductible genannt. In diesem Falle hat die Gleichung II immer 3 reelle Wurzeln, wie in §. 137 gezeigt werden soll, wo zugleich ein Weg angegeben wird, auf welchem sie gefunden werden.

§. 135. Bezeichnet man die in der Cardanischen Formel gegebene Wurzel mit α , so ist $x^3 + b x + c$ durch $x - \alpha$ theilbar; man findet bei der Division den Quotienten $x^2 + \alpha x + (b + \alpha^2)$ und den Rest $\alpha^3 + b \alpha + c$, welcher identisch $= 0$ ist. Die andern Wurzeln finden sich also in der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \alpha x + (b + \alpha^2) = 0$$

$$\text{und sind } x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{-4b - 3\alpha^2}}{2} = \frac{-\alpha \pm 2\sqrt{-b - \frac{3}{4}\alpha^2}}{2}$$

Diese sind offenbar imaginär, wenn b positiv ist; aber auch dann sind sie imaginär, wenn b negativ ist, doch so daß $c^2 + \frac{4}{27}b^3$ positiv ist, Man bezeichne nämlich

$$\begin{aligned} \text{so ist } c^2 + \frac{4}{27}b^3 &= c^2 - \varepsilon^2 \\ -b &= 3\sqrt[3]{\frac{c^2 - \varepsilon^2}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{Ferner ist } \alpha = \sqrt[3]{\frac{c + \varepsilon}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c - \varepsilon}{2}}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \sqrt[3]{\frac{(c - \varepsilon)^2}{4}} + \sqrt[3]{\frac{(c + \varepsilon)^2}{4}} + 2\sqrt[3]{\frac{c^2 - \varepsilon^2}{4}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{(c - \varepsilon)^2}{4}} + \sqrt[3]{\frac{(c + \varepsilon)^2}{4}} - \frac{2}{3}b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Also ist } -b - \frac{3}{4}\alpha^2 &= -\frac{1}{2}b - \sqrt[3]{\frac{(c - \varepsilon)^2}{4}} - \sqrt[3]{\frac{(c + \varepsilon)^2}{4}} \\ &= -\frac{3}{4}\left\{\sqrt[3]{\frac{(c - \varepsilon)^2}{4}} + \sqrt[3]{\frac{(c + \varepsilon)^2}{4}} + \frac{2}{3}b\right\} \end{aligned}$$

welche sich umformen läßt in

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\left(\frac{3 + \sqrt{-7}}{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{3 - \sqrt{-7}}{3}\right)^3} \\ &= \frac{3 + \sqrt{-7}}{2} + \frac{3 - \sqrt{-7}}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$= -\frac{3}{4} \left\{ \sqrt[3]{\frac{(c - \varepsilon)^2}{4}} + \sqrt[3]{\frac{(c + \varepsilon)^2}{4}} - 2 \sqrt[3]{\frac{c^2 - \varepsilon^2}{4}} \right\}$$

$$= -\frac{3}{4} \left\{ \sqrt[3]{\frac{c - \varepsilon}{2}} - \sqrt[3]{\frac{c + \varepsilon}{2}} \right\}^2$$

also negativ, die Quadratwurzel daraus also imaginär.

§. 136. Wenn

$$c^2 + \frac{4}{27} b^3 = 0$$

so ergibt die Cardanische Formel die reelle Wurzel

$$x = -2 \sqrt[3]{\frac{c}{2}}$$

Durch Division erhält man die Gleichung

$$x^2 - 2x \sqrt[3]{\frac{c}{2}} + \left(b + 4 \sqrt[3]{\frac{c^2}{4}} \right) = 0$$

welche die beiden andern Wurzeln enthält. Diese sind

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2}} \pm \sqrt{-b - 3 \sqrt[3]{\frac{c^2}{4}}}$$

das Glied $\sqrt[3]{-b - 3 \sqrt[3]{\frac{c^2}{4}}}$ ist aber $= 0$; denn da $c^2 = -\frac{4}{27} b^3$ ist, so ist $\sqrt[3]{\frac{c^2}{4}} = -\frac{1}{3} b$ also $3 \sqrt[3]{\frac{c^2}{4}} = -b$ also

$$b + 3 \sqrt[3]{\frac{c^2}{4}} = 0$$

Die 3 Wurzeln der gegebenen Gleichung sind demnach in diesem Falle reell, sie sind

$$x = -2 \sqrt[3]{\frac{c}{2}} \quad x = \sqrt[3]{\frac{c}{2}} \quad x = \sqrt[3]{\frac{c}{2}}$$

§. 137. Der irreductible Fall. Es sei $c^2 + \frac{4}{27} b^3$ negativ. Man gelangt in diesem Falle zur Auflösung der Gleichung II durch Betrachtung des Cosinus einer Summe. Da

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

so ist $\cos 3\alpha = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha$

$$= \cos \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$= \cos \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha$$

$$= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha - \cos 3\alpha = 0$$

$$\cos^3 \alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos 3\alpha = 0$$

Hieraus erkennt man sogleich, daß die besondere kubische Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{4} x - \frac{1}{4} \cos \varphi = 0$$

3 verschiedene reelle Wurzeln hat, nämlich
 $x = \cos \frac{1}{3} \varphi$; $x = \cos \frac{1}{3} (\varphi + 2\pi)$; $x = \cos \frac{1}{3} (\varphi + 4\pi)$

Dieser Gleichung kann man leicht eine allgemeinere Form geben, wenn man $x = \frac{z}{q}$ setzt; sie wird dann

$$\frac{z^3}{q^3} - \frac{3}{4} \frac{z}{q} - \frac{1}{4} \cos \varphi = 0$$

$$z^3 - \frac{3}{4} q^2 z - \frac{1}{4} q^3 \cos \varphi = 0 \quad (a)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$q \cos \frac{1}{3} \varphi; \quad q \cos \frac{1}{3} (\varphi + 2\pi); \quad q \cos \frac{1}{3} (\varphi + 4\pi)$$

Vergleicht man mit der Gleichung (a) die Gleichung II so sieht man, daß man nur q und φ durch die Gleichungen

$b = -\frac{3}{4} q^2$ $c = -\frac{1}{4} q^3 \cos \varphi$
 zu bestimmen braucht, um die Wurzeln der Gleichung (II) zu erhalten. Sie ergeben

$$q = 2 \sqrt{-\frac{1}{3} b} \quad \cos \varphi = -\frac{4c}{q^3} = -\frac{c}{\sqrt{-\frac{4}{27} b^3}}$$

Dies ist immer möglich, da nach der Voraussetzung b negativ und $\frac{c}{\sqrt{-\frac{4}{27} b^3}}$ ein ächter Bruch ist. Man muß, um jede Zwei-

deutigkeit zu entfernen, hinzufügen, daß φ immer zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen soll; demgemäß ist die Quadratwurzel, welche in dem Ausdrucke für $\cos \varphi$ vorkommt, positiv zu nehmen, wenn c negativ ist; negativ, wenn c positiv ist. Ebenso ist die Quadratwurzel in dem Ausdrucke für q zu nehmen, so daß also q positiv ist, wenn c negativ ist, negativ, wenn c positiv ist.

Aus den Auslösungsformeln ergibt sich folgende Anlage der logarithmischen Rechnung

$$\log q = \log 2 + \frac{1}{2} \log \left(-\frac{1}{3} b\right)$$

$$\log \cos \varphi = \log 4c - 3 \log q$$

wo unter $\log q$ und $\log 4c$ natürlich die Logarithmen der absoluten Werthe von q und $4c$ verstanden sind. Hierdurch und durch die obigen Zeichenbestimmungen sind φ und q unzweideutig bestimmt.

Bezeichnet man die 3 Wurzeln der Gleichung mit x_1, x_2, x_3 so ist

$$x_1 = \pm \text{num} \left\{ \log q + \log \cos \frac{1}{3} \varphi \right\}$$

$$x_2 = \pm \text{num} \left\{ \log q + \log \cos \frac{1}{3} (\varphi + 2\pi) \right\}$$

$$x_3 = \pm \text{num} \left\{ \log q + \log \cos \frac{1}{3} (\varphi + 4\pi) \right\}$$

wo die oberen und unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem c positiv oder negativ ist. Unter $\log q$; $\log \frac{1}{3} (\varphi + \pi)$; $\log \frac{1}{3} (\varphi + 2\pi)$ sind natürlich die Logarithmen der absoluten Werthe dieser Zahlen verstanden.

§. 138. Die Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (III.)$$

läßt sich immer auf die Form II. zurückführen. Man setze nämlich $x = z + m$, so geht die Gleichung III. über in

$$\left. \begin{array}{l} z^3 + 3m\{z^2 + 3m^2\}z + m^3 \\ + a\} + 2am\{ \\ + b\} + bm\{ \\ + c \end{array} \right\} = 0$$

Hierin bestimme man m so, daß $3m + a = 0$ wird, mache also $m = -\frac{1}{3}a$, so geht die Gleichung über in

$$z^3 + (b - \frac{1}{3}a^2)z + F(-\frac{1}{3}a) = 0$$

wo unter $F(-\frac{1}{3}a)$ das verstanden wird, was aus der linken Seite der Gleichung III. wird, wenn $-\frac{1}{3}a$ an die Stelle von x gesetzt wird. Somit ist diese Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

Die logarithmischen Gleichungen.

§. 139. Es giebt eine Klasse von transcendenten Gleichungen, welche sich auf algebraische zurückführen lassen; diejenigen nämlich, welche so umgeformt werden können, daß auf der einen Seite nur 1 steht, während die andre Seite ein Produkt von Potenzen ist, deren Grundgröße bekannte Größen sind, während die Exponenten algebraische Verbindungen der Unbekannten mit gegebenen Größen sind. Solche Gleichungen nennt man logarithmische.

Sind die Exponenten Verbindungen ersten Grades, so haben die Gleichungen die allgemeine Form

$$a^{px+q} \cdot b^{rx+s} \cdot c^{tx+u} \cdot \dots = 1$$

diese Gleichung spricht dasselbe aus, wie die

$$(px + q) \log a + (rx + s) \log b + (tx + u) \log c + \dots = 0$$

$$x = - \frac{q \log a + s \log b + u \log c + \dots}{p \log a + r \log b + t \log c + \dots}$$

Sind die Exponenten algebraische Verbindungen vom zweiten oder dritten Grade, so führt die Umformung auf algebraische Gleichungen zweiten oder dritten Grades.

Die unbestimmten Gleichungen ersten Grades.

§. 140. Es gibt unendlich viele Werthepaare von x und y , welche der Gleichung

$$fx + gy = k \quad (1)$$

entsprechen. Stellt man aber die Bedingung auf, daß x und y ganze Zahlen sein sollen, während gleichzeitig auch f , g und k ganze Zahlen sind, so fallen unendlich viele Auflösungen aus, doch aber können noch unendlich viele übrig bleiben. Damit die Aufgabe möglich sei, ist jedenfalls erforderlich, daß jedes gemeinsame Maas von f und g auch ein Maas von k sei. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, läßt sich die Gleichung (1) immer auf eine solche zurückführen, in welcher f und g relative Primzahlen sind; denn sind f und g nicht relative Primzahlen, so kann man die Gleichung durch das größte gemeinsame Maas von f und g , welches ja auch ein Maas von k ist, dividiren; der umgeformten Gleichung

werden dieselben Werthe von x und y genügen, wie der gegebenen, und umgekehrt; folglich ist die Gleichung in ihrem Wesen nicht geändert. Die Aufgabe verliert demnach Nichts an ihrer Allgemeinheit, wenn man voraussetzt, daß f und g relative Primzahlen sind.

§. 141. 1. Um die Aufgabe aufzulösen, verwandle man den Bruch $\frac{g}{f}$ in einen Kettenbruch. Wenn dieser Kettenbruch n Gliederbrüche hat, so daß der letzte Näherungsbruch $\frac{a_n}{b_n} = \frac{g}{f}$, so ist nach

§. 104. 3

$a_{n-1}f - g b_{n-1} = \pm 1$
wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine grade oder ungrade Zahl ist. Hieraus ergibt sich zur Auflösung der Gleichung (1)

$f(\pm a_{n-1}k) + g(\mp b_{n-1}k) = k$
so daß also

$$\begin{aligned} x &= \pm a_{n-1}k \\ y &= \mp b_{n-1}k \end{aligned}$$

eine Auflösung der Gleichung (1) ist, immer mit der Bestimmung, daß das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n eine grade oder ungrade Zahl ist. Hieraus ergeben sich unendlich viele neue Auflösungen. Denn die Gleichung (1) wird erfüllt durch

$$\begin{aligned} x &= \pm a_{n-1}k + gm \\ y &= \mp b_{n-1}k - fm \end{aligned}$$

wo m jede beliebige ganze Zahl vorstellt.

Zugleich erkennt man leicht nach §. 29, daß in diesen beiden unbestimmten Formen alle Auflösungen der gegebenen Gleichungen enthalten sind.

In der bisherigen Entwicklung ist vorausgesetzt, daß f und g positiv sind, oder, was damit auf dasselbe hinaus kommt, daß f und g gleiche Vorzeichen haben. Wenn f und g entgegengesetzte Vorzeichen haben, oder, wie man mit derselben Allgemeinheit sagen kann, wenn f positiv und g negativ ist, so daß die Gleichung (1) übergeht in

$$fx - gy = k \quad (2)$$

so ergeben sich auf dieselbe Weise die Auflösungsformen

$$\begin{aligned} x &= \pm a_{n-1}k + gm \\ y &= \pm b_{n-1}k + fm \end{aligned}$$

2. Die Aufgabe ist identisch mit der: Eine ganze Zahl y von der Art zu finden, daß $\frac{k - gy}{f}$ eine ganze Zahl wird, oder: Eine

ganze Zahl x von der Art zu finden, daß $\frac{k - fx}{g}$ eine ganze Zahl wird. Hiervon geht die sogenannte Divisionsmethode aus. Sie ist zwar im Grunde dieselbe Methode, wie die in 1 entwickelte, nur versteckt; im Allgemeinen ist sie weitläufiger, doch für Anfänger anschaulicher, und, wenn die gegebenen Zahlen klein sind, auch wol kürzer. Sie besteht in Folgendem:

Man bezeichne die größten in $\frac{k}{f}$ und $\frac{g}{f}$ enthaltenen ganzen Zahlen mit K und G , die betreffenden Divisionsreste mit k' und g' , so ist

$$\frac{k - gy}{f} = K - Gy + \frac{k' - g'y}{f}$$

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt: y so zu bestimmen, daß $\frac{k' - g'y}{f}$ eine ganze Zahl z wird, d. h. es muß z so bestimmt werden, daß

$$\frac{k' - fz}{g'}$$

eine ganze Zahl wird. Bezeichnet man die größten in $\frac{k'}{g'}$ und $\frac{f}{g'}$ enthaltenen ganzen Zahlen mit K' und F' , die betreffenden Divisionsreste mit k'' und f'' , so ist

$$\frac{k' - fz}{g'} = K' - F'g + \frac{k'' - f'z}{g'}$$

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, einen Werth von z zu finden, so daß $\frac{k'' - f'z}{g'}$ eine ganze Zahl t wird, d. h. es muß t so bestimmt werden, daß

$$\frac{k'' - g't}{f''}$$

eine ganze Zahl wird. So wird die Aufgabe immer auf neue Bruchformen zurückgeführt, deren Nenner immer kleiner werden; und da diese Nenner ganze Zahlen sind, so müssen sie beim Abnehmen einmal zur Grenze 1 gelangen. Dann ist die Bedingung durch jeden ganzen Werth der unbestimmten Zahl in der betreffenden Zahlform erfüllt und dadurch rückwärts gehend die Aufgabe gelöst.

3. Durch 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten, durch 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten, allgemein durch n Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten sind diese Unbekannten ebensowenig bestimmt, wie durch 1 Gleichung 2 Unbekannte bestimmt sind. Durch Elimination lassen sich n Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten immer auf n Gleichungen mit je 2 Unbekannten zurückführen, welche sich nach (1) oder (2) auflösen lassen.

§. 142. Es soll eine Zahl y gefunden werden, welche mehrere Zahlverbindungen

$$\frac{k - gy}{f}, \frac{k_1 - g_1 y}{f_1}, \frac{k_2 - g_2 y}{f_2}, \dots$$

gleichzeitig zu ganzen Zahlen macht.

1. Als erste Bedingung der Möglichkeit ist sogleich die ersichtlich, daß jedes gemeinschaftliche Maaf von f und g auch ein Maaf von k , jedes gemeinschaftliche Maaf von f_1 und g_1 auch ein Maaf von k_1 , jedes gemeinschaftliche Maaf von f_2 und g_2 auch ein Maaf von k_2 , u. s. w. ist. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, wie in §. 141 voraussetzen, daß f und g , f_1 und g_1 , f_2 und g_2 . . . Paare relativer Primzahlen sind.

2. Man löse die Gleichung

$$f x + g y = k$$

nach (1) oder (2) §. 141 auf, so erhält man

$$y = M + ft$$

wo M eine bestimmte, t eine unbestimmte ganze Zahl bezeichnet.

Man substituirt diesen Ausdruck für y in $\frac{k_1 - g_1 y}{f_1}$ so erhält man

$$\frac{k_1 - g_1 M - g_1 ft}{f_1};$$

es muß t so bestimmt werden, daß dieser Ausdruck eine ganze Zahl wird; oder die unbestimmte Gleichung

$$f_1 x + g_1 ft = k_1 - g_1 M$$

muß in Bezug auf t aufgelöst werden. Damit sie möglich sei, muß jedes gemeinsame Maaf von f_1 und $g_1 f$, oder, was dasselbe ist, jedes gemeinsame Maaf von f_1 und f auch ein Maaf von $k_1 - g_1 M$ sein. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so ergibt sich für t die allgemeine Form

$$t = m + f_1' u$$

wo m eine bestimmte ganze Zahl, f_1' den Quotienten bezeichnet, welchen man erhält, wenn man f_1 durch das größte gemeinsame Maaf von f und f_1 dividirt, und u eine unbestimmte ganze Zahl ist. Daraus ergibt sich

$$y = M + fm + ff_1' u \\ = M' + F' u$$

wo $M' = M + fm$ und F' der kleinste gemeinsame Dividuus von f und f_1 ist. So fortfahrend erhält man bei jedem neuen Quotienten, der eine ganze Zahl werden soll, eine neue Bedingung der Möglichkeit, und wenn alle Bedingungen erfüllt sind, erhält man als allgemeine Auflösungsform für y die Zahl

$$N + F^{(n)} z$$

wo N eine durch die Auflösungen bestimmte ganze Zahl, und $F^{(n)}$ den kleinsten gemeinsamen Dividuus aller Nenner, und z eine unbestimmte ganze Zahl bezeichnet.

Alle unter (2) neu auftretenden Bedingungen der Möglichkeit sind von selbst erfüllt in dem besonders einfachen Falle, daß alle Nenner gegenseitig paarweise relative Primzahlen sind.

Die Aufgabe wird auch dann besonders einfach, wenn die Coefficienten von y , nämlich $g_1 g_2 g_3 \dots$ sämmtlich $= 1$ sind. Die Aufgabe, y so zu bestimmen, daß

$$\frac{y - k}{f}, \frac{y - k_1}{f_1}, \frac{y - k_2}{f_2} \dots$$

ganze Zahlen sind, ist keine andere als die: Eine Zahl zu finden, welche durch f dividirt den Rest k , durch f_1 dividirt den Rest k_1 , durch f_2 dividirt den Rest k_2 u. s. w. läßt. Die Auflösung ergibt für y eine Zahl von der Form

$$N + Fz$$

wo F der kleinste gemeinsame Dividuus aller Nenner ist. Wenn insbesondere alle Nenner, jeder zu jedem, relative Primzahlen sind, so wird die allgemeine Form

$$N + f f_1 f_2 \dots z$$

Zweite Abtheilung.

Die Geometrie.

Die Aufgabe wird auch dann besonders einfach, wenn die Coefficienten von y , nämlich E, G, I , ... , sämtlich $= 1$ sind. Die Aufgabe, y so zu bestimmen, daß

$$\frac{y - k}{1} \cdot \frac{y - k'}{1} \cdot \frac{y - k''}{1} \dots = 1$$

ganze Zahlen sind, ist keine andere als die: Eine Zahl zu finden, welche durch 1 dividirt den Rest k , durch 1 dividirt den Rest k' , durch 1 dividirt den Rest k'' , ... , läßt. Die Aufstellung ergibt für y eine Zahl von der Form

$$N + E x$$

wo E der kleinste gemeinsame Theiler aller Nenner ist. Wenn insbesondere alle Nenner, jeder zu ihrem relativen Primzahlen sind, so wird die allgemeine Form

$$N + 111 \dots x$$

ausgedrückt werden, wo N die Zahl bezeichnet, welche durch 1 dividirt den Rest k , durch 1 dividirt den Rest k' , durch 1 dividirt den Rest k'' , ... , läßt. Man erhält es

folgendermaßen: Man bestimme, daß jeder Theiler von 1 durch 1 dividirt den Rest k , durch 1 dividirt den Rest k' , durch 1 dividirt den Rest k'' , ... , läßt. Man erhält es

folgendermaßen: Man bestimme, daß jeder Theiler von 1 durch 1 dividirt den Rest k , durch 1 dividirt den Rest k' , durch 1 dividirt den Rest k'' , ... , läßt. Man erhält es

folgendermaßen: Man bestimme, daß jeder Theiler von 1 durch 1 dividirt den Rest k , durch 1 dividirt den Rest k' , durch 1 dividirt den Rest k'' , ... , läßt. Man erhält es

folgendermaßen: Man bestimme, daß jeder Theiler von 1 durch 1 dividirt den Rest k , durch 1 dividirt den Rest k' , durch 1 dividirt den Rest k'' , ... , läßt. Man erhält es

folgendermaßen: Man bestimme, daß jeder Theiler von 1 durch 1 dividirt den Rest k , durch 1 dividirt den Rest k' , durch 1 dividirt den Rest k'' , ... , läßt. Man erhält es

folgendermaßen: Man bestimme, daß jeder Theiler von 1 durch 1 dividirt den Rest k , durch 1 dividirt den Rest k' , durch 1 dividirt den Rest k'' , ... , läßt. Man erhält es

1. Die Planimetrie.

Einführung.

Zweite Abtheilung.

Die Geometrie.

Zweite Abtheilung.

Die Geometrie.

1. Die Planimetrie.

Einleitung.

§. 1. Die Aufgabe der Geometrie ist: Erkenntniß der Gesetze der räumlichen Formen. Mit der Form steht die Größe des Geformten und der das Geformte bildenden Theile in der innigsten Wechselbeziehung, so daß hier, wie in der Arithmetik, Größenbetrachtung und Formbetrachtung aufs innigste verbunden sind (Vgl. Nr. §. 1. 2).

§. 2. Ein Körper, welcher Gegenstand geometrischer Betrachtung ist, ist dies nur rücksichtlich seiner Ausdehnung; von Allem, was ihm sonst angehört und zukommt, z. B. von seinen physikalischen Eigenschaften, wird abstrahirt. Das Erzeugniß dieser Abstraktion nennt man einen mathematischen Körper.

Ein Körper ist nach allen Richtungen ausgedehnt.

Bei einem Körper wird schon im täglichen Leben sehr häufig von der Ausdehnung nach einzelnen Richtungen abstrahirt; z. B. bei einer Wand, welche tapezirt werden soll, ist die Dicke gleichgültig. Das räumliche Gebilde, welches man erhält, wenn man bei einem Körper von seiner Ausdehnung nach einer Richtung absteht, abstrahirt, (wodurch zugleich unendlich viele andre Richtungen wegfallen) nennt man eine Fläche.

Sehr häufig wird noch von der Ausdehnung nach einer andern Richtung abgesehen; z. B. wenn die eine Seite eines Gartens entlang eine Hecke gezogen werden soll, so ist die Breite des Gartens ganz gleichgültig. Das räumliche Gebilde, welches man erhält, wenn man bei einer Fläche von ihrer Ausdehnung nach einer Richtung abstrahirt (wodurch wieder zugleich unendlich viele Richtungen wegfallen) nennt man eine Linie.

Die Linie ist nur nach einer Richtung ausgedehnt; eine weitere, den bisherigen entsprechende Abstraktion ist also nicht mehr möglich.

§. 3. Wie man durch Weglassen von Richtungen aus dem Körper, der alle Richtungen enthält, zu der einfachern räumlichen Vorstellung der Fläche, und von dieser zur Linie gelangt, so gelangt man umgekehrt durch Beilegung einer Bewegung nach einer neuen Richtung von der einfachsten räumlichen Vorstellung zum Körper.

Die einfachste räumliche Vorstellung ist die eines Ortes im Raume. Ein Ort im Raume ist nicht ausgedehnt; in jeder noch so kleinen Ausdehnung giebt es unendlich viele Derter. Ein Ort im Raum heißt ein Punkt.

Denkt man sich einen Punkt bewegt, so ist das Erzeugniß dieser Bewegung (der Weg, welchen der Punkt durchläuft) eine Linie. Sie ist überall nur nach einer Richtung ausgedehnt; sie hat nur eine Dimension, die Länge. Wenn der erzeugende Punkt bei dieser Bewegung seine Richtung fortwährend beibehält, so heißt die erzeugte Linie eine gerade; wenn der erzeugende Punkt seine Richtung fortwährend ändert, so heißt die erzeugte Linie eine krumme. Eine Linie, bei deren Erzeugung sprungweise Aenderungen der Richtung eintreten, läßt sich als eine Verbindung mehrerer Linien betrachten; man nennt sie wol eine gebrochene.

Denkt man sich eine Linie nach einer neuen Richtung bewegt, d. h. so, daß im Allgemeinen jeder Punkt der Linie sich nach einer Richtung bewegt, nach welcher sich der die Linie erzeugende Punkt an der betreffenden Stelle nicht bewegte, so ist das Erzeugniß dieser Bewegung eine Fläche. Sie ist durch Ausdehnung nach 2 Richtungen entstanden, sie hat 2 Dimensionen (Länge, Breite). Es sind damit zugleich an jeder Stelle unendlich viele neue Richtungen aufgetreten. — Wenn die erzeugende Linie eine gerade ist, und bei ihrer Bewegung fortwährend dieselbe Richtung beibehält, so heißt die erzeugte Fläche eine Ebene. Durch andre Linien und durch andre Bewegungen werden im Allgemeinen krumme Flächen erzeugt.

Denkt man sich eine Fläche nach einer neuen Richtung bewegt, so ist das Erzeugniß dieser Bewegung ein Körper. Er ist durch Ausdehnung nach 3 Richtungen entstanden, er hat 3 Dimensionen (Länge, Breite, Dicke). Mit der dritten Richtung sind wieder unendlich viele neue Richtungen hinzugekommen, und zwar so, daß der Körper an jeder Stelle nach allen denkbaren Richtungen ausgedehnt ist. Durch Bewegung eines Körpers läßt sich also nicht ein neues räumliches Gebilde erzeugen, sondern nur eine Erweiterung des erzeugten hervorbringen.

§. 4. Man betrachtet in dem ersten Theile der Geometrie, der Planimetrie, nur solche räumliche Gebilde, welche einer Ebene angehören; und in der elementaren Planimetrie nur solche, welche durch grade Linien und eine Klasse von krummen Linien, Kreise, gebildet werden.

Der Kreis ist der Inbegriff aller Punkte einer Ebene, welche von einem gegebenen Punkte derselben eine gegebene Entfernung haben.

Der Inbegriff aller derjenigen Lagen, welche ein Punkt vermöge irgend einer Bedingung annehmen kann, heißt der geometrische Ort des Punktes für diese Bedingung.

Demnach ist der Kreis der geometrische Ort des Punktes, der von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat.

Der gegebene Punkt heißt Mittelpunkt, die gegebene Entfernung heißt Radius des Kreises.

Erstes Capitel.

Von der graden Linie, und der Lage grader Linien gegen einander.

§. 5. Eine grade Linie wird erzeugt durch einen Punkt, welcher sich fortwährend nach derselben Richtung bewegt. Eine grade Linie ist also vollständig bestimmt durch 2 Punkte, einen Ausgangs- und einen Richtungs-Punkt. Es ist gleichgültig, welcher der beiden Punkte als Ausgangs-, welcher als Richtungspunkt angesehen wird.

§. 6. Vergleichung grader Linien rücksichtlich ihrer Größe. Rüksichtlich ihrer Größe können nur begrenzte Linien verglichen werden. Jede Linie kann mit jeder andern unmittelbar verglichen, jede kann als Einheit angenommen werden. Zweckmäßig ist es sehr oft, eine allgemein angenommene, durch das Gesetz festgestellte Länge als Einheit zu Grunde zu legen. In Preußen ist die durch das Gesetz festgestellte Grundeinheit die Ruthe, aus welcher der Bequemlichkeit wegen die Hülfeinheiten Fuß, Zoll, Linie, Meile abgeleitet werden.

§. 7. Vergleichung der graden Linien rücksichtlich ihrer gegenseitigen Lage und Richtung. Bei dieser Betrachtung werden die Linien in der Regel nicht als begrenzt gedacht. —

Grade Linien können entweder hinter einander oder neben einander liegen; das erstere findet Statt, wenn sie Stücke derselben unbegrenzten graden Linie sind, wenn sie verlängert nur eine grade Linie ausmachen; das letztere, wenn dies nicht der Fall ist.

Zwei neben einander liegende Linien haben immer (unbegrenzt gedacht) einen Punkt gemein; dieser kann in endlicher oder in unendlicher Entfernung liegen; im ersten Falle heißen die Linien geneigt, im zweiten parallel; im ersten Falle haben sie einen Durchschnittspunkt, im zweiten nicht.

Geneigte Linien heißen konvergent, wenn man sie nach der Seite ansieht, nach welcher sie zusammenlaufen, divergent, wenn man sie nach der Seite ansieht, nach welcher sie aus einander laufen.

§. 8. Die Neigung zweier Linien heißt ihr Winkel. Die Neigung zweier Linien gegen einander wird erkannt durch die Größe der Drehung, welche erforderlich ist, um von der einen graden Linie zur andern zu gelangen. Demnach ist der Winkel zweier Linien das Maas der Drehung, welche erforderlich ist, um von der einen Linie zur andern zu gelangen. Der gemeinschaftliche Punkt der beiden Linien, der Drehungspunkt, heißt Scheitel; die beiden Linien Schenkel. Ein Winkel wird bezeichnet durch 1 Buchstaben, als Bezeichnung des Scheitels; oder durch 2 Buchstaben, als Bezeichnungen der Schenkel; oder durch 3 Buchstaben, als Bezeichnungen des Scheitels und je eines Punktes der beiden Schenkel; in letzterem Falle steht immer der den Scheitel bezeichnende Buchstabe in der Mitte.

§. 9. Vergleichung der Winkel rücksichtlich ihrer Größe. Für die Winkelmessung bietet sich naturgemäß als Grundeinheit der flache oder gestreckte Winkel dar; er ist ein Winkel, dessen Schenkel eine grade Linie bilden und vom Scheitelpunkte aus nach entgegengesetzten Richtungen sich erstrecken. Als Hülfeinheiten werden daraus abgeleitet: der rechte Winkel, der Grad, die Minute, die Sekunde.

Der rechte Winkel ist die Hälfte eines flachen.

Der Grad ist der 90ste Theil eines rechten Winkels.

Die Minute ist der 60ste Theil eines Grades.

Die Sekunde ist der 60ste Theil einer Minute.

Ein Winkel, welcher kleiner ist, als ein rechter, wird ein spitzer genannt; ein Winkel, welcher größer als ein rechter und kleiner als ein flacher ist, wird ein stumpfer genannt; ein Winkel, welcher größer ist als ein flacher, heißt ein überstumpfer, konvexer, oder erhabener Winkel; im Gegensatz dazu wird ein Winkel, welcher kleiner ist, als ein flacher, ein konkaver oder hohler genannt.

Wenn 2 Linien einen rechten Winkel bilden, so sagt man, sie stehen senkrecht, lothrecht, perpendicular auf einander; oder die eine ist ein Loth, ein Perpendikel auf der andern.

§. 10. Betrachtung der Winkel ihrer gegenseitigen Lage nach. Es werden zunächst und insbesondere solche Winkel in Betracht gezogen, welche den Scheitel gemeinsam haben; solche, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben; und solche, welche nur einen Schenkel gemeinsam haben.

§. 11. 1. Solche Winkel, welche nur den Scheitel gemeinsam haben, heißen anstoßende Winkel.

2. Wenn insbesondere 2 anstoßende Winkel solche Lage haben, daß die Schenkel des einen die Rückverlängerungen der Schenkel des andern sind, so heißen sie Scheitelwinkel.

3. Scheitelwinkel sind gleich, denn sie sind das Maas derselben Drehung.

§. 12. 1. Solche Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, heißen anliegende Winkel, und, wenn ihrer mehr als 2 sind, auch Folgewinkel.

Der von den beiden nicht gemeinsamen Schenkeln zweier anlie-

genden Winkel gebildete Winkel ist gleich der Summe der beiden anliegenden Winkel, wenn dieselben vom gemeinsamen Schenkel aus nach entgegengesetzten Seiten hin liegen; und gleich ihrer Differenz, wenn sie nach derselben Seite hin liegen.

2. Zwei anliegende Winkel, deren nicht gemeinsame Schenkel eine grade Linie bilden, heißen Nebenwinkel.

3. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich 2 Rechten. Denn?

Zwei Winkel, deren Summe gleich 2 Rechten ist, heißen supplementär. Demnach läßt sich der vorige Satz auch so aussprechen: Nebenwinkel sind supplementär.

§. 13. 1. Solche Winkel, welche nur einen Schenkel gemeinsam haben, führen keinen gemeinschaftlichen Namen.

Rücksichtlich des gemeinsamen Schenkels können sie entweder auf derselben Seite, oder auf entgegengesetzten Seiten liegen; danach heißen sie Gegenwinkel oder Wechselwinkel.

Rücksichtlich der nicht gemeinsamen Schenkel können sie entweder beide zwischen denselben, oder beide nicht zwischen denselben, oder der eine zwischen denselben, der andere nicht zwischen denselben liegen; danach heißen sie innere, äußere, oder gemischte Winkel.

Durch Zusammenfassung dieser beiden Eintheilungsarten erhält man 6 Klassen von Winkelpaaren, welche einen Schenkel gemeinsam haben. Man stellt sie sämtlich durch eine Figur dar, wenn man 2 grade Linien durch eine dritte durchschneiden läßt; man erhält dadurch 4 Paar gemischte Gegenwinkel, 2 Paar innere Gegenwinkel, 2 Paar äußere Gegenwinkel, 4 Paar gemischte Wechselwinkel, 2 Paar innere Wechselwinkel, 2 Paar äußere Wechselwinkel.

2. Wenn insbesondere die beiden durchschnittenen Linien (die beiden nicht gemeinsamen Schenkel) parallel sind, so denke man sich die eine derselben mit der durchschneidenden Linie (dem gemeinsamen Schenkel) fest verbunden, und verschiebe diese mit jener in sich selbst, bis die Scheitel auf einander fallen, so fallen die gemischten Gegenwinkel deckend auf einander, und man erkennt daraus, daß sie gleich sind; die inneren Wechselwinkel und die äußeren Wechselwinkel kommen in die Lage von Scheitelwinkeln, und man erkennt daraus, daß sie gleich sind; die gemischten Wechselwinkel, die inneren Gegenwinkel, die äußeren Gegenwinkel kommen in die Lage von Nebenwinkeln, und man erkennt daraus, daß sie supplementär sind.

Man hat demnach die 6 Sätze:

- a. Gemischte Gegenwinkel sind gleich, wenn ihre nicht gemeinsamen Schenkel parallel sind.
- b. Innere Wechselwinkel sind gleich, wenn u. s. w.
- c. Äußere Wechselwinkel sind gleich, wenn u. s. w.
- d. Gemischte Wechselwinkel sind supplementär, wenn u. s. w.
- e. Innere Gegenwinkel sind supplementär, wenn u. s. w.
- f. Äußere Gegenwinkel sind supplementär, wenn u. s. w.

Oder kürzer:

a. Gemischte Gegenwinkel an Parallelen sind gleich.
Entsprechend für die andern Sätze.
In ähnlicher einfacher Weise ergibt sich die Richtigkeit der Umkehrungen jener 6 Sätze.

a. Wenn gemischte Gegenwinkel gleich sind, so sind ihre nicht gemeinschaftlichen Schenkel parallel.

Entsprechend für die andern Sätze.

Oder kürzer:

a. Gleiche gemischte Gegenwinkel liegen an Parallelen.

Entsprechend für die andern Sätze.

Jeder dieser Sätze läßt sich mit seiner Umkehrung in einen zusammenfassen:

a. Gemischte Gegenwinkel an Parallelen und nur an Parallelen sind gleich.

Entsprechend für die andern Sätze.

Daraus ergibt sich:

a. Gemischte Gegenwinkel sind ungleich, wenn ihre nicht gemeinschaftlichen Schenkel geneigt sind.

Oder kürzer:

Gemischte Gegenwinkel an geneigten Linien sind ungleich.

Und umgekehrt:

Wenn gemischte Gegenwinkel ungleich sind, so sind ihre nicht gemeinsamen Schenkel geneigt.

Oder kürzer:

Ungleiche gemischte Gegenwinkel liegen an geneigten Linien.

Entsprechend für die andern Sätze.

§. 14. Folgerungen.

1. Wenn 2 Linien einer dritten parallel sind, so sind sie einander parallel.

2. Perpendikel auf derselben graden Linie sind parallel.

3. Wenn von 2 parallelen Linien die eine auf einer dritten senkrecht steht, so steht auch die andere auf dieser dritten senkrecht. Oder: Wenn eine grade Linie auf einer von 2 Parallelen senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

4. Perpendikel auf parallelen graden Linien sind parallel, auf geneigten geneigt.

§. 15. Grundaufgaben.

Eine grade Linie ist bestimmt durch einen Ausgangspunkt und die Richtung; am einfachsten wird die Richtung bestimmt durch einen Richtungspunkt; sie ist auch sehr einfach dadurch bestimmt, daß sie auf einer gegebenen Linie senkrecht stehen, oder mit ihr parallel sein soll.

Die nächsten Aufgaben sollen mit Hülfe des Lineals und des Winkelhafens gelöst werden. Das Lineal ist das Modell einer graden Linie, der Winkelhaken das Modell eines rechten Winkels. Prüfung des Winkelhafens vermöge §. 12.

1. In einem gegebenen Punkte einer graden Linie auf derselben ein Perpendikel zu errichten.

Die Aufgabe hat nur 1 Auflösung; d. h. ?

2. Von einem gegebenen Punkte außerhalb einer graden Linie ein Perpendikel auf dieselbe zu fallen.

Die Aufgabe hat nur 1 Auflösung; d. h.?

Sind die Aufgaben 1. und 2. wesentlich von einander verschieden?

3. Durch einen Punkt außerhalb einer graden Linie eine Parallele mit derselben zu ziehen.

Die Aufgabe hat nur 1 Auflösung; d. h.?

Zweiter Abschnitt

Von Winkeln

§ 1. Ein Winkel ist der Raum zwischen zwei sich in einem Punkte schneidenden geraden Linien. Die beiden Linien heißen die Seiten des Winkels, der Punkt, in dem sie sich schneiden, heißt der Scheitel.

§ 2. Ein Winkel wird durch zwei Buchstaben oder durch einen kleinen Buchstaben bezeichnet. Wenn zwei Winkel an demselben Scheitel oder an verschiedenen Scheiteln auf einer Geraden liegen, so heißen sie benachbarte Winkel.

§ 3. Zwei Winkel heißen vertikal, wenn sie an demselben Scheitel liegen und ihre Seiten entgegengesetzt sind. Vertikale Winkel sind einander gleich.

§ 4. Zwei Winkel heißen supplementär, wenn ihre Summe zwei rechten Winkel ausmacht. Liegen zwei benachbarte Winkel auf einer Geraden, so sind sie supplementär.

§ 5. Zwei Winkel heißen komplementär, wenn ihre Summe einen rechten Winkel ausmacht. Ein Winkel ist komplementär zu einem anderen Winkel, wenn der Rest ein rechter Winkel ist.

§ 6. Zwei Winkel heißen congruent, wenn sie gleich groß sind. Zwei Winkel sind congruent, wenn sie durch eine Bewegung in einander fallen lassen werden können.

§ 7. Zwei Winkel heißen gleich, wenn sie congruent sind. Zwei Winkel sind gleich, wenn sie durch eine Bewegung in einander fallen lassen werden können.

§ 8. Zwei Winkel heißen ungleich, wenn sie nicht congruent sind. Zwei Winkel sind ungleich, wenn sie nicht durch eine Bewegung in einander fallen lassen werden können.

§ 9. Zwei Winkel heißen rechte Winkel, wenn sie zwei rechten Winkel ausmachen. Ein rechter Winkel ist die Hälfte eines gestreckten Winkels.

§ 10. Zwei Winkel heißen stumpfe Winkel, wenn sie größer als ein rechter Winkel sind. Ein stumpfer Winkel ist größer als ein rechter Winkel.

Zweites Capitel.

Vom Dreieck.

§. 16. Erklärung. Ein Dreieck ist eine von 3 graden Linien vollständig begrenzte Figur.

Die Linien, soweit sie zur Begrenzung des Dreiecks dienen, heißen Seiten. Die gesammte Begrenzung, die Summe der Seiten, heißt Umfang.

Durch das Durchschneiden der 3 graden Linien entstehen 12 Winkel am Dreieck; dieselben sind paarweis einander gleich, und lassen sich deshalb auf 6 zurückführen. Unter allen Winkeln des Dreiecks verstehen wir diese 6.

Diese Winkel zerfallen in innere und äußere. Innere sind solche, welche innerhalb der Figur liegen; äußere sind die Nebenwinkel der inneren.

§. 17. Winkelsätze vom Dreieck.

1. Die Summe aller Winkel des Dreiecks ist gleich 6 Rechten. Folgt aus §. 12. 3.

2. Die Summe der äußeren Winkel am Dreieck, wie an jeder geschlossenen Figur, ist gleich 4 Rechten.

Denn bewegt man eine grade Linie um eine geschlossene Figur ganz herum, so daß sie der Reihe nach mit allen Seiten zusammenfällt, so erzeugt (durchläuft) sie alle äußeren Winkel. Die Bewegung dieser graden Linie ist zusammengesetzt aus Verschiebungen und Drehungen; jene haben auf diese keinen Einfluß; die Gesamtdrehung ist also genau dieselbe, als wenn die Verschiebungen nicht vorhanden wären, d. h. als wenn die Drehung um einen Punkt erfolgte; das Maas der Drehung ist also gleich 4 Rechten; folglich ist die Summe der äußeren Winkel an jeder geschlossenen Figur gleich 4 Rechten.

3. Die Summe der inneren Winkel am Dreieck ist gleich 2 Rechten. Folgt aus 1. und 2.

4. Jeder äußere Winkel am Dreieck ist gleich der Summe der beiden inneren, die nicht seine Nebenwinkel sind.

Denn der äußere Winkel ist so groß, daß er mit dem inneren der sein Nebenwinkel ist, 2 Rechte beträgt; die Summe der beiden inneren Winkel ist nach 3 ebenfalls so groß, daß sie mit dem dritten inneren 2 Rechte beträgt; folglich ist der äußere gleich der Summe jener beiden inneren.

§. 18. Eintheilung der Dreiecke.

1. Rücksichtlich ihrer Winkel: In stumpfwinklige, rechtwinklige und spitzwinklige. — Ein stumpfwinkliges Dreieck ist ein solches, in welchem ein Winkel ein stumpfer ist; dann sind die beiden andern spitz. Ein rechtwinkliges Dreieck ist ein solches, in welchem ein Winkel ein rechter ist; dann sind die beiden andern spitz. Ein spitzwinkliges Dreieck ist ein solches, in welchem alle 3 Winkel spitz sind.

2. Rücksichtlich ihrer Seiten: In gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige. Ein gleichseitiges Dreieck ist ein solches, in welchem alle 3 Seiten gleich sind. — Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein solches, in welchem 2 Seiten einander gleich, die dritte ihnen ungleich ist; die gleichen Seiten heißen Schenkel, die dritte Seite heißt Grundlinie, der Durchschnittspunkt der Schenkel Spitze. — Ein ungleichseitiges Dreieck ist ein solches, in welchem alle 3 Seiten ungleich sind.

§. 19. Seiten- und Winkelsätze vom Dreieck d. h. Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks.

1. Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber; ungleichen Seiten eines Dreiecks liegen ungleiche Winkel gegenüber, und zwar der größeren Seite der größere Winkel.

Denn man denke sich einen Winkel des Dreiecks durch eine grade Linie halbiert, und die Halbierungslinie bis zur gegenüberstehenden Dreiecksseite verlängert, so zerfällt dadurch das gegebene Dreieck in 2 Dreiecke. Legt man das eine Dreieck auf das andere, indem man es um die Halbierungslinie herumdreht, so fallen die Schenkel des halbirten Winkels der Richtung nach auf einander. Sind überdies die Schenkel des halbirten Winkels einander gleich, so fallen ihre Endpunkte in einander; die den gleichen Seiten gegenüber liegenden Winkel fallen also deckend auf einander, und daraus erkennt man, daß sie gleich sind. Sind dagegen die Schenkel des halbirten Winkels ungleich, so fallen ihre Endpunkte nicht in einander; es entsteht ein neues Dreieck, in welchem der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel innerer, und der der größeren gegenüberliegende äußerer und nicht sein Nebenwinkel wird; folglich ist (§. 17. 4.) der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel größer als der der kleineren Seite gegenüberliegende.

2. Umkehrung. Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber; ungleichen Winkeln eines Dreiecks liegen ungleiche Seiten gegenüber, und zwar dem größeren Winkel die größere Seite.

Nach 1. durch Beantwortung folgender Fragen zu beweisen: Können gleichen Winkeln ungleiche Seiten gegenüberliegen? Können

ungleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberliegen? Kann dem größeren Winkel die kleinere Seite gegenüberliegen? (Indirekter, apagogischer Beweis.)

§. 20. Folgerungen.

A. 1. Ein gleichseitiges Dreieck ist auch gleichwinklig, jeder Winkel desselben ist gleich $\frac{2}{3}$ Rechten. — Ein gleichwinkliges Dreieck ist auch gleichseitig.

2. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; jeder von ihnen ist ein spitzer. — Wenn in einem Dreieck 2 Winkel einander gleich sind, der dritte ungleich ist, so ist es gleichschenklig; die Seite, an welcher die gleichen Winkel anliegen, ist die Grundlinie.

3. Im ungleichseitigen Dreieck sind alle 3 Winkel ungleich. — Wenn in einem Dreieck die 3 Winkel ungleich sind, so ist es ungleichseitig.

B. 1. Im stumpfwinkligen Dreieck ist diejenige Seite die größte, welche dem stumpfen Winkel gegenüber steht.

2. Im rechtwinkligen Dreieck ist diejenige Seite die größte, welche dem rechten Winkel gegenübersteht; sie heißt die Hypotenuse; die beiden andern Seiten heißen Katheten.

C. 1. Wenn in einem Dreieck die Verbindungslinie einer Ecke mit der Mitte der gegenüberstehenden Seite kleiner ist, als die Hälfte der gegenüberstehenden Seite, so ist der Winkel, von dessen Scheitel aus die Verbindungslinie gezogen ist, ein stumpfer; wenn die Verbindungslinie gleich der Hälfte ist, so ist der Winkel ein rechter; wenn sie größer als die Hälfte ist, so ist er ein spitzer.

2. Umgekehrt: Die Verbindungslinie des Scheitels des stumpfen Winkels eines stumpfwinkligen Dreiecks mit der Mitte der gegenüberstehenden Seite ist kleiner als die Hälfte dieser Seite; die Verbindungslinie des Scheitels des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck mit der Mitte der Hypotenuse ist gleich der halben Hypotenuse; die Verbindungslinie des Scheitels eines spitzen Winkels im Dreieck mit der Mitte der gegenüberstehenden Seite ist größer als die Hälfte der gegenüberstehenden Seite.

Der geometrische Ort der Spitze des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks über einer der Lage und Größe nach gegebenen Hypotenuse ist ein Kreis, welcher die Mitte der gegebenen Hypotenuse zum Mittelpunkt und die halbe Hypotenuse zum Radius hat. (S. §. 4.)

D. 1. Von jedem Punkte außerhalb einer graden Linie lassen sich unzählig viele grade Linien zur Linie ziehen; die kürzeste von allen ist das Perpendikel; dasselbe dient als Maas der Entfernung des Punktes von der Linie. Die andern sind um so größer, je weiter ihr Fußpunkt vom Fußpunkte des Perpendikels entfernt ist, oder je größer der Winkel ist, welchen sie mit dem Perpendikel bilden. Paarweise sind sie einander gleich, und zwar sind diejenigen einander gleich, deren Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkte des Perpendikels entfernt sind, oder welche gleiche Winkel mit dem Perpendikel bilden.

Hieraus ergiebt sich: Ein Kreis kann mit einer graden Linie

höchstens 2 Punkte gemein haben; er hat 2 Punkte mit ihr gemein, wenn der Radius des Kreises größer ist als die Entfernung des Mittelpunktes von der Linie; die zwei Punkte fallen in einen zusammen, wenn der Radius gleich dieser Entfernung ist; sie haben keinen Punkt gemein, wenn der Radius kleiner ist, als diese Entfernung.

2. Der Inbegriff aller derjenigen Punkte, welche von 2 gegebenen Punkten gleich weit entfernt sind, ist eine grade Linie, welche auf ihrer Verbindungslinie in der Mitte senkrecht steht. — Oder: der geometrische Ort eines Punktes welcher von 2 gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist, ist eine grade Linie, welche auf der Verbindungslinie in ihrer Mitte senkrecht steht.

E. Folgerungen aus D.

1. Das Perpendikel aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie halbt diese und den Winkel an der Spitze.

2. Die Verbindungslinie der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie steht auf dieser senkrecht und halbt den Winkel an der Spitze.

3. Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks steht auf der Grundlinie senkrecht und halbt dieselbe.

4. Das Perpendikel in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks auf dieser errichtet trifft die Spitze und halbt den Winkel daselbst.

5. Die Verbindungslinie der Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke, welche eine gemeinsame Grundlinie haben, halbt die Winkel an den beiden Spitzen und die Grundlinie, und steht auf der letzteren senkrecht. U. s. w.

§. 21. Grundaufgaben, mit Hülfe des Zirkels und des Lineals zu lösen.

1. Eine gegebene grade Linie zu halbiren.

Man suche irgend 2 Punkte, deren jeder gleichweit von den Endpunkten der gegebenen Linie entfernt ist, so ist ihre Verbindungslinie der geometrische Ort des Punktes, welche von den beiden gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist, enthält also auch den gesuchten Halbierungspunkt, der andrerseits auch in der gegebenen Linie liegen muß, mithin gefunden ist.

2. Durch einen gegebenen Punkt eine grade Linie zu ziehen, welche auf einer gegebenen graden Linie senkrecht stehe. (Vgl. §. 15. 1. 2.)

Man suche 2 Punkte der Linie, welche von dem gegebenen Punkte gleichweit entfernt sind; suche einen dritten Punkt, welcher von diesen 2 Punkten gleich weit entfernt ist: verbinde diesen mit dem gegebenen Punkte, so ist die Verbindungslinie das gesuchte Perpendikel.

3. Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Man suche in den beiden Schenkeln 2 Punkte, welche gleich weit von dem Scheitelpunkte entfernt sind; suche einen dritten Punkt, welcher gleich weit von diesen beiden Punkten entfernt ist, und verbinde

ihn mit dem Scheitelpunkte, so ist die Verbindungslinie die gesuchte Halbierungslinie.

§. 22. Seitensätze vom Dreiecke.

1. Die Summe je zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte.

Denn zwischen je 2 Eckpunkten des Dreiecks sind durch die Begrenzung des Dreiecks 2 Wege gegeben: ein grader in der einen Seite, und ein anderer in der Summe der beiden andern Seiten; die grade Linie aber ist der kürzeste Weg zwischen 2 Punkten.

Anm. Will man das Letzte nicht als Grundsatz gelten lassen, so dient der vorgelegte Satz zur Begründung desselben und bedarf dann eines andern Beweises. Dieser findet sich leicht darin, daß man eine Seite mit der Summe der beiden andern Seiten unter einem der jener Seite anliegenden Winkel zusammensetzt und die freien Endpunkte mit einander verbindet; in dem so gebildeten Dreieck ist der Winkel, welcher der Summe der beiden Seiten gegenüberliegt, wie sich leicht ergibt, größer, als der Winkel, welcher der einen Seite gegenüberliegt; mithin ist die Summe der beiden Seiten größer als die dritte Seite.

2. Die Differenz je zweier Seiten eines Dreiecks ist kleiner als die dritte.

Unmittelbare Folgerung aus 1.

§. 23. Congruenzsätze vom Dreieck.

Figuren nennt man kongruent, wenn sie sich so auf einander legen lassen, daß sie einander vollständig decken; wenn also die eine nur eine Wiederholung der andern ist. Bei ebenen Figuren ist dies der Fall, wenn sie aus denselben Theilen, denselben Seiten und Winkeln, auf dieselbe Weise zusammengesetzt sind. Für Dreiecke insbesondere ist dies der Fall, wenn ihre 3 Seiten einzeln genommen gleich sind, und ihre entsprechenden Winkel gleich sind; alle Dreiecke, welche aus denselben 3 Seiten und denselben 3 Winkeln auf dieselbe Weise zusammengesetzt sind, sind kongruent, sind dasselbe Dreieck; oder mit andern Worten: Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 3 Seiten und 3 Winkel von bestimmter Lage gegen die Seiten. Diese 6 Bedingungen lassen sich zunächst auf 5 zurückführen, indem durch 2 Winkel eines Dreiecks der dritte mit bestimmt ist. Aber zwischen den übrigbleibenden 5 Bestimmungsstücken bestehen noch bestimmte Abhängigkeiten in der Art, daß durch einzelne dieser Bestimmungsstücke andre mit bestimmt sind. — Die Aufgabe der folgenden Sätze ist, die 5 Bedingungen auf möglichst wenige, unter sich unabhängige, zurückzuführen.

1. Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 1 Seite und 2 Winkel von bestimmter Lage gegen die Seite.

Anm. Die Summe der 2 Winkel muß $< 2R$ sein. (§. 17. 3.)

a. Die beiden Winkel seien anliegende.

Man lege die Seite an irgend eine Stelle hin, so sind dadurch 2 Eckpunkte bestimmt; es fragt sich, ob durch die beiden andern Bedingungen der dritte Eckpunkt bestimmt ist. — Man lege an die Seite in ihrem einen Eckpunkte den einen Winkel an, so muß der dritte Eck-

punkt auf dem zweiten Schenkel dieses Winkels liegen; man lege den andern Winkel an dieselbe Seite in ihrem andern Eckpunkte an, so muß der dritte Eckpunkt auch auf dem zweiten Schenkel dieses Winkels liegen. Der dritte Eckpunkt ist also auf 2 geometrische Derter, und zwar auf 2 grade Linien angewiesen, ist also durch ihren Durchschnittspunkt vollständig bestimmt. — Alle Dreiecke, welche dieselben Bestimmungsstücke enthalten, sind also kongruent; Mithin:

a'. Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in 1 Seite und den anliegenden Winkeln.

b. Von den beiden Winkeln sei der eine ein anliegender, der andre ein gegenüberliegender.

Durch die 2 Winkel ist der dritte, folglich der zweite anliegende bestimmt; mithin nach a. das Dreieck vollständig bestimmt. Folglich auch

b'. Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in 1 Seite, 1 anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel.

Beide Sätze zusammengefaßt ergeben:

1'. Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in 1 Seite und 2 Winkeln von gleicher Lage.

2. Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel.

Man lege eine der beiden Seiten an irgend eine Stelle hin, so sind dadurch 2 Eckpunkte ihrer Lage nach bestimmt; es handelt sich darum, ob durch die beiden andern Bedingungen der dritte Eckpunkt bestimmt ist. Er ist durch dieselben auf 2 geometrische Derter angewiesen: eine nach einer Seite begrenzte grade Linie und einen Kreis, welche einen Punkt mit einander gemein haben; ist also vollständig bestimmt. Demnach:

2'. Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

3. Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 2 Seiten und den der größeren gegenüberliegenden Winkel.

Man lege die Seite, welcher der gegebene Winkel nicht gegenüberliegen, welcher er also anliegen soll, an irgend eine Stelle hin, so sind dadurch 2 Eckpunkte gegeben; durch die 2 andern Bedingungen wird der dritte Eckpunkt auf 2 geometrische Derter angewiesen, 1 grade Linie, welche durch den einen Eckpunkt der Seite geht und durch denselben einseitig begrenzt wird, und 1 Kreis, welcher den andern Eckpunkt zum Mittelpunkt hat. Der Kreis hat mit der unbegrenzt gedachten Linie 2 Punkte gemein, von denen jedoch immer nur 1 auf dem in Betracht kommenden Theile der Linie liegt; der dritte Eckpunkt ist also vollständig bestimmt. Demnach:

3'. Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in 2 Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel.

Zusatz. Ein Dreieck ist im Allgemeinen bestimmt durch 2 Seiten und den einer von beiden gegenüberliegenden Winkel; vollständig bestimmt, wenn der Winkel der größeren Seite gegenüberliegen soll; zweideutig, wenn er der kleineren gegenüberliegen soll.

soß, vorausgesetzt, daß der gegebene Winkel ein spitzer ist, und die als gegenüberliegende gegebene Seite größer ist, als in einem rechtwinkligen Dreieck, welches bestimmt ist durch die andere gegebene Seite als Hypotenuse und den gegebenen Winkel, die dem Winkel gegenüberliegende Kathete. Die beiden Dreiecke fallen in eins zusammen, wenn sie gleich dieser Kathete ist; sie werden unmöglich, wenn sie kleiner als die Kathete ist. Unmöglich würde auch ein Dreieck sein, in welchem der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel ein rechter oder ein stumpfer sein sollte.

4. Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch drei Seiten.

Anm. Die Summe je zweier Seiten muß größer sein, als die dritte (§. 22).

Man lege eine Seite an irgend eine Stelle hin, so sind dadurch 2 Eckpunkte bestimmt; durch die beiden andern Bedingungen ist der dritte Eckpunkt auf 2 Kreise als geometrische Dexter angewiesen, kann also nur in den Punkten liegen, welche diesen Kreisen gemeinsam sind; deren giebt es 2; es sind dadurch also 2 Dreiecke bestimmt, die jedoch kongruent, also dasselbe Dreieck sind. Man erkennt dies, wenn man die beiden Lagen des dritten Eckpunktes durch eine grade Linie mit einander verbindet; diese Verbindungslinie ist die gemeinsame Grundlinie zweier gleichschenkligen Dreiecke; die Verbindungslinie der Spitzen dieser gleichschenkligen Dreiecke halbirte die Winkel an den Spitzen, mithin sind die entsprechenden Winkel in beiden Dreiecken gleich. Demnach:

4. Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in den 3 Seiten.

§. 24. Folgerungen.

1. Vom rechtwinkligen Dreieck.

Ein rechtwinkliges Dreieck ist vollständig bestimmt:

- a. Durch 1 spitzen Winkel und 1 Seite von bestimmter Lage.
- b. Durch 2 Seiten von bestimmter Lage.

2. Vom gleichschenkligen Dreieck.

Ein gleichschenkliges Dreieck ist vollständig bestimmt:

- a. Durch 1 Seite von bestimmter Lage und 1 Winkel von bestimmter Lage.
- b. Durch die Grundlinie und eine der beiden gleichen Seiten.

3. Vom gleichseitigen Dreieck.

Das gleichseitige Dreieck ist vollständig bestimmt durch eine Seite.

§. 25. 1. Wenn in einem Dreieck 2 Seiten bestimmt sind, der eingeschlossene Winkel veränderlich ist, so ist auch die dritte Seite veränderlich, und zwar ist sie um so größer, je größer jener Winkel ist. Oder:

1'. Wenn 2 Dreiecke paarweise gleich haben 2 Seiten, ungleich aber den eingeschlossenen Winkel, so haben sie auch die dritte Seite ungleich; und zwar enthält dasjenige Dreieck die größere dritte Seite, welches den größeren eingeschlossenen Winkel enthält.

Man bringe die beiden zu betrachtenden Dreiecke in solche Lage,

daß sie mit einem der beiden Paare gleicher Seiten auf einander liegen, und zwar mit den entsprechenden Endpunkten, so werden die beiden andern gleichen Seiten von einem Endpunkte ausgehen, und die beiden dritten Seiten von dem andern Endpunkte. Wenn man nun diese dritten Seiten zu Seiten eines Dreiecks macht, indem man ihre Endpunkte durch eine grade Linie verbindet, so fragt es sich nur, welcher der beiden den Seiten gegenüberliegenden Winkel der größere ist. Die Beantwortung dieser Frage ergibt sich leicht dadurch, daß die Verbindungslinie gleichzeitig Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ist, und aus §. 20. A. 2.

2. Umgekehrt. Wenn in einem Dreieck 2 Seiten bestimmt sind, die dritte aber veränderlich, so ist auch der der dritten Seite gegenüberliegende Winkel veränderlich, und zwar ist er um so größer, je größer die dritte Seite ist. Oder:

2.' Wenn 2 Dreiecke paarweise gleich haben 2 Seiten, ungleich aber die dritte Seite, so haben sie auch den der dritten Seite gegenüberliegenden Winkel ungleich, und zwar enthält dasjenige Dreieck den größeren Winkel, welches die größere dritte Seite enthält.

Ergiebt sich leicht indirekt in derselben Weise wie §. 19. 2.

§. 26. Grundaufgaben.

1. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene grade Linie in einem gegebenen Punkte vermittlest Zirkel und Lineal abzutragen.

Vermittelt des Zirkels lassen sich nur Längen fixiren, also auch nur Längen unmittelbar übertragen; ein Winkel nur mittelbar dadurch, daß er zum Winkel eines Dreiecks gemacht wird, welches dann auf Grund des §. 23. 4. an die vorgeschriebene Stelle sich übertragen läßt. Am bequemsten ist es, den Winkel zum Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks zu machen.

Das gewöhnliche Mittel zum Uebertragen der Winkel ist der Transporteur. Beschreibung desselben. Winkelmessung durch denselben.

2. Durch einen gegebenen Punkt eine grade Linie zu ziehen, welche einer gegebenen graden Linie parallel ist, vermittlest Zirkel und Lineal.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt eine grade Linie, welche die gegebene grade Linie schneidet; am Durchschnittpunkte bilden die 2 graden Linien 4 Winkel; einen derselben trage man nach 1. in dem gegebenen Punkte an die gezogene Linie so an, daß er mit dem gewählten ein Paar gemischte Gegenwinkel, oder innere Wechselwinkel, oder äußere Wechselwinkel bildet; so ist der zweite Schenkel des so übertragenen Winkels die gesuchte Parallele.

Drittes Capitel.

Vom Viereck und vom Vieleck.

§. 27. Erklärung. Ein Viereck ist eine von 4 graden Linien vollständig begrenzte Figur. Seiten, Umfang, Winkel des Vierecks (s. §. 16). — Die Verbindungslinien je zweier gegenüberstehenden Eckpunkte des Vierecks heißen Diagonalen. Es giebt 2 Diagonalen im Viereck.

§. 28. Winkelsätze vom Viereck.

1. Die Summe aller Winkel am Viereck ist $= 8 \text{ R.}$ (S. §. 17. 1.)
2. Die Summe der äußeren Winkel am Viereck ist $= 4 \text{ R.}$ (S. §. 17. 2.)
3. Die Summe der inneren Winkel des Vierecks ist $= 4 \text{ R.}$

§. 29. Eintheilung der Vierecke nach der gegenseitigen Lage der gegenüberstehenden Seiten.

In einem Viereck sind die gegenüberstehenden Seiten entweder paarweise parallel, oder die Seiten des einen Paares sind parallel, die des andern geneigt, oder sie sind paarweise geneigt. Im ersten Falle heißt das Viereck ein Parallelogramm, im zweiten ein Trapez, im dritten ein Trapezoid.

§. 30. Winkelsätze vom Parallelogramm.

1. a. In einem Parallelogramm sind die an einer Seite anliegenden Winkel paarweise supplementar. (S. 13. 2. e.)
- b. Umkehrung. Wenn in einem Viereck die an zwei anstoßenden Seiten anliegenden Winkelpaare supplementar sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (S. 13. 2. e. Umf.)
- c. Halbe Umkehrung. Wenn in einem Viereck ein Paar gegenüberstehende Seiten parallel und die Winkel an einer dieser Seiten supplementar sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (S. 13. 2. e. und Umf.)

2. a. In einem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Winkel paarweise gleich.

Denn jeder von ihnen ist so groß, daß er mit demselben dritten Winkel des Parallelogramms dieselbe Summe von 2 R. bildet.

b. Umkehrung. Wenn in einem Viereck die gegenüberstehenden Winkel paarweise gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Denn dann ist die Summe je zweier Winkel an einer Seite gleich der Summe der beiden Winkel an der gegenüberstehenden Seite, folglich die Hälfte der Gesamtsumme der inneren Winkel des Vierecks, d. h. $= 2 \text{ R.}$; demnach ergibt sich aus 1. b., daß das Viereck ein Parallelogramm ist.

c. Halbe Umkehrung. Wenn in einem Viereck ein Paar gegenüberstehende Seiten parallel und ein Paar gegenüberstehende Winkel gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Denn je einer dieser beiden Winkel ist dem zweiten an der gegenüberstehenden parallelen Seite anliegenden Winkel supplementär; folglich ist auch der andere der beiden Winkel diesem Winkel supplementär, mithin nach 1. c. das Viereck ein Parallelogramm.

§. 31. Seitensätze vom Parallelogramm.

a. In jedem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Seiten paarweise gleich.

Denn durch eine Diagonale wird das Parallelogramm in 2 Dreiecke zerlegt, welche kongruent sind, weil sie übereinstimmen in 1 Seite und 2 Winkeln von gleicher Lage, und in welchen die gegenüberstehenden Seiten des Parallelogramms entsprechende Seiten sind.

Dieser Satz ist derselbe, wie der: Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Anm. In diesem Satze liegt ein Mittel zur Auflösung der Grundaufgabe: Eine gegebene grade Linie in eine willkürlich gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

b. Umkehrung. Wenn in einem Viereck die gegenüberstehenden Seiten paarweise gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Denn durch eine Diagonale wird das Viereck in 2 Dreiecke zerlegt, welche kongruent sind, weil sie in allen 3 Seiten übereinstimmen, mithin sind die entsprechenden Winkel gleich. 2 Paare solcher entsprechenden Winkel sind Paare innerer Wechselwinkel, deren nicht gemeinsame Schenkel also parallel sind; das sind die beiden Paare gegenüberstehender Seiten des Vierecks.

c. Halbe Umkehrung. Wenn in einem Viereck ein Paar gegenüberstehende Seiten parallel und gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Denn durch eine Diagonale wird das Viereck in 2 Dreiecke zerlegt, welche kongruent sind, weil sie in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, folglich sind die dritten Seiten gleich; diese bilden das andre Paar gegenüberstehender Seiten des Vierecks, welches also nach b. ein Parallelogramm ist.

Dieser Satz ist derselbe, wie der: Wenn man eine grade Linie von gegebener Länge so parallel mit sich selbst verschiebt, daß der eine Endpunkt eine grade Linie durchläuft, so durchläuft auch der andere Endpunkt eine grade Linie, welche jener parallel ist.

§. 32. Diagonalsätze vom Parallelogramm.

a. In einem Parallelogramm halbiren sich die Diagonalen gegenseitig.

Man betrachte ein Paar Scheiteldreiecke, d. h. solche Dreiecke, welche von je 2 Diagonalstücken und einer Parallelogrammseite gebildet werden, und nur einen Eckpunkt gemein haben. Sie sind kongruent, weil sie übereinstimmen in 1 Seite und 2 Winkeln von gleicher Lage; entsprechende Seiten in ihnen sind je 2 Stücke derselben Diagonale; diese sind also paarweise einander gleich.

b. Umkehrung. Wenn in einem Viereck die Diagonalen sich gegenseitig halbiren, so ist es ein Parallelogramm.

Denn die Scheiteldreiecke sind paarweise kongruent, vermöge Gleichheit zweier Seiten und der eingeschlossenen Winkel; sie haben also auch die dritten Seiten paarweise gleich; das sind aber je 2 gegenüberstehende Seiten des Vierecks, welches also nach §. 31. b. ein Parallelogramm ist.

c. Halbe Umkehrung. Wenn in einem Viereck ein Paar gegenüberstehende Seiten parallel sind, und eine Diagonale durch die andre halbirt wird, so ist es ein Parallelogramm.

Denn die 2 Scheiteldreiecke, welche die parallelen Seiten enthalten, sind kongruent, weil sie übereinstimmen in 1 Seite und 2 Winkeln von gleicher Lage; ein Paar entsprechende Seiten in ihnen sind die parallelen Seiten des Vierecks; diese sind also gleich, mithin nach §. 31. c. das Viereck ein Parallelogramm.

§. 33. Eintheilung der Parallelogramme.

1. Rücksichtlich der Winkel zerfallen die Parallelogramme in rechtwinklige und schiefwinklige. — Ein rechtwinkliges Parallelogramm ist ein solches, in welchem 1 Winkel ein rechter ist; dann sind sie alle rechte; ein schiefwinkliges Parallelogramm ist ein solches, in welchem 1 Winkel ein schiefer ist; dann sind sie alle schiefe.

2. Rücksichtlich der Seiten zerfallen die Parallelogramme in gleichseitige und ungleichseitige. Ein gleichseitiges Parallelogramm ist ein solches, in welchem ein Paar anstoßende Seiten gleich sind: dann sind je 2 anstoßende Seiten gleich; ein ungleichseitiges Parallelogramm ist ein solches, in welchem ein Paar anstoßende Seiten ungleich sind; dann sind je 2 anstoßende Seiten ungleich.

Rücksichtlich des Größenverhältnisses der Diagonalen und rücksichtlich des von ihnen gebildeten Winkels kann man die Parallelogramme eintheilen in solche, in welchen die Diagonalen gleich, und in solche, in welchen sie ungleich sind; ferner in solche, in welchen die Diagonalen sich unter rechten Winkeln schneiden, und in solche, in welchen sie sich unter schiefen Winkeln schneiden. Diese Eintheilungen

würden aber identisch sein mit den eben gegebenen, wie sich aus folgenden Sätzen ergibt:

a. Im rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen gleich, im schiefwinkligen sind sie ungleich; und umgekehrt.

b. Im gleichseitigen Parallelogramme schneiden sich die Diagonalen unter rechten Winkeln, im ungleichseitigen unter schiefen Winkeln; und umgekehrt.

Die Beweise dieser beiden Sätze sind leicht, und gründen sich, der erste auf Betrachtung zweier Dreiecke, welche gebildet sind durch eine gemeinsame Parallelogramm-Seite, ein Paar gegenüberstehende Seiten und die Diagonalen; der zweite auf Betrachtung zweier Nebendreiecke, d. h. solcher Dreiecke, welche gebildet werden durch eine gemeinsame Diagonalthälfte, die beiden Hälften der andern Diagonale und ein Paar anstoßende Parallelogramm-Seiten.

Durch Zusammenfassung der beiden obigen Eintheilungs-Arten erhält man 4 Klassen von Parallelogrammen:

Das rechtwinklige gleichseitige Parallelogramm heißt Quadrat.

Das rechtwinklige ungleichseitige Parallelogramm heißt Rechteck.

Das schiefwinklige gleichseitige Parallelogramm heißt Rhombus.

Das schiefwinklige ungleichseitige Parallelogramm heißt Rhomboid.

§. 34. Kongruenzsätze für die 4 Klassen von Parallelogrammen.

1. Ein Quadrat ist vollständig bestimmt:

a. Durch 1 Seite.

b. Durch 1 Diagonale.

2. Ein Rechteck ist vollständig bestimmt:

a. Durch 2 anstoßende Seiten.

b. Durch 1 Diagonale und den Diagonalwinkel.

3. Ein Rhombus ist vollständig bestimmt:

a. Durch 1 Seite und 1 Umfangswinkel.

b. Durch die beiden Diagonalen.

4. Ein Rhomboid ist vollständig bestimmt:

a. Durch 2 anstoßende Seiten und 1 Umfangswinkel.

b. Durch die beiden Diagonalen und den von ihnen gebildeten Winkel.

Anm. Die Kongruenzbedingungen der Vierecke überhaupt finden nicht solche Anwendungen, daß es nöthig wäre, sich dieselben einzuprägen; sie werden deshalb hier nicht aufgeführt, obgleich ihre Aufsuchung eine angemessene Übung für Schüler ist; deshalb finden sie sich auch ganz passend in den meisten Aufgabensammlungen. Im Allgemeinen ist ein Viereck durch 5 von einander unabhängige Stücke bestimmt. Beim Parallelogramm sind 2 dieser Stücke durch die 2 Bedingungen ersetzt, daß die gegenüberstehenden Seiten paarweise parallel sind.

§. 35. Erklärung. Ein n -Eck ist eine von n graden Linien vollständig begrenzte Figur. Seiten, Umfang, Winkel. (S. S. 16.)

Eine Diagonale ist eine Verbindungslinie zweier nicht durch eine Seite verbundenen Eckpunkte. Von jedem Eckpunkt im n -Eck gehen

$n-3$ Diagonalen aus; die Anzahl aller Diagonalen im n -Eck ist $\frac{n(n-3)}{2}$

§. 36. Winkelsätze vom Vieleck.

1. Die Summe aller Winkel am n -Eck ist $= 2n$ R. (§. 17. 1.)

2. Die Summe der äußeren Winkel am n -Eck ist $= 4$ R. (§. 17. 2.)

3. Die Summe der inneren Winkel im n -Eck ist $= (2n-4)$ R. (1. 2.)

§. 37. Ein Vieleck, dessen Seiten sämtlich einander gleich sind, und dessen Winkel sämtlich einander gleich sind, heißt ein regelmäßiges. Das regelmäßige Dreieck ist das gleichseitige, das regelmäßige Viereck das Quadrat.

Jeder innere Winkel eines regelmäßigen n -Ecks ist $= \frac{2n-4}{n}$ R.

Ein regelmäßiges Vieleck ist vollständig bestimmt durch seine Seitenzahl und 1 Seite.

Ein n -Eck ist im Allgemeinen bestimmt durch $2n-3$ von einander unabhängige Bestimmungsstücke.

Viertes Capitel.

Größenvergleichung der gradlinigen geschlossenen Figuren.

§. 38. Den Ausgangspunkt der Größenvergleichung der geschlossenen Figuren bildet das Parallelogramm. Es hat dies seinen Grund darin, daß das Parallelogramm am einfachsten unter allen Figuren durch Bewegung einer begrenzten graden Linie entsteht. Das erzeugte Parallelogramm ist seiner Größe nach offenbar abhängig von der Größe der erzeugenden Linie, der Grundlinie, und von der Größe der Bewegung, welche gemessen wird durch die senkrechte Entfernung der Endlage der Grundlinie von ihrer Anfangslage, der Höhe. Es entsteht zunächst die Frage, ob die Größe auch abhängig ist von der Richtung der Bewegung, von dem Winkel des Parallelogramms. Diese Frage wird in §. 39. beantwortet, und daran werden sogleich die entsprechenden Folgerungen für das Dreieck und die gradlinigen Figuren geknüpft. Dann wird die Frage beantwortet, wie die Größe des Parallelogramms von der Größe der Grundlinie und der Größe der Höhe abhängig ist, und in Folge davon die ganze Aufgabe der Ausmessung der gradlinigen Figuren vermittelt gemessener Linien gelöst. Daran schließen sich noch einige besondere wegen ihrer Wichtigkeit hervorzuhebende Sätze vom Quadrat.

In einem gegebenen Parallelogramm kann jede beliebige Seite als Grundlinie angesehen werden; ihre Entfernung von der gegenüberliegenden Seite ist dann die Höhe. Auch im Dreieck sieht man irgend eine Seite als Grundlinie an, und nennt dann die Entfernung des gegenüberliegenden Eckpunktes von ihr die Höhe.

§. 39. Fundamentalsatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind gleich.

Denn 2 solche Parallelogramme kann man zwischen 2 Parallelen, deren Entfernung gleich der Höhe des Parallelogramms ist, so legen, daß sie keinen Punkt gemeinsam haben. Dann entstehen 2 Trapeze, von denen unmittelbar ersichtlich ist, daß sie kongruent sind; diese haben ein kleineres Trapez gemeinschaftlich; wenn man dieses von jenen abzieht, so bleiben die beiden Parallelogramme übrig, deren Gleichheit hieraus hervorgeht.

§. 40. Folgerungen.

A. 1. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und ungleichen Höhen sind ungleich.

2. Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind ungleich.

3. Parallelogramme von ungleichen Grundlinien und ungleichen Höhen können gleich, auch ungleich sein.

B. 1. Gleiche Parallelogramme von gleichen Grundlinien haben gleiche Höhen.

2. Gleiche Parallelogramme von gleichen Höhen haben gleiche Grundlinien.

3. Gleiche Parallelogramme von ungleichen Grundlinien haben ungleiche Höhen.

4. Gleiche Parallelogramme von ungleichen Höhen haben ungleiche Grundlinien.

C. 1. Ungleiche Parallelogramme von gleichen Grundlinien haben ungleiche Höhen.

2. Ungleiche Parallelogramme von gleichen Höhen haben ungleiche Grundlinien.

3. Ungleiche Parallelogramme von ungleichen Grundlinien können gleiche, auch ungleiche Höhen haben.

4. Ungleiche Parallelogramme von ungleichen Höhen können gleiche, auch ungleiche Grundlinien haben.

§. 41. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Denn ein Dreieck ist die Hälfte desjenigen Parallelogrammes, welches man erhält, wenn man von 2 Eckpunkten desselben Parallelen mit den gegenüberstehenden Seiten zieht, also auch die Hälfte eines jeden Parallelogrammes, welches mit diesem, also auch mit dem Dreieck, gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

§. 42. Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind einander gleich.

Folgt aus §. 39. und 41. Daraus ergeben sich für das Dreieck Folgerungen, welche denen des §. 40. entsprechen.

§. 43. Grundaufgaben.

I. Verwandlungsaufgaben. Eine Figur verwandeln heißt: ihr eine andere Form geben, ohne ihre Größe zu ändern.

1. Ein Parallelogramm in ein Dreieck von gleicher Grundlinie, oder von gleicher Höhe, und umgekehrt, zu verwandeln.

Leicht nach §. 41.

2. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß eine Seite unverändert bleibt, an die Stelle eines anliegenden Winkels aber ein anderer von gegebener Größe tritt.

Da eine Seite unverändert bleibt, so muß auch die zugehörige Höhe unverändert bleiben; für diese Bedingung ist der geometrische Ort der Spitze eine grade Linie, welche der Grundlinie parallel ist.

3. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, so daß eine Seite unverändert bleibt, an die Stelle eines Winkels aber ein anderer von gegebener Größe tritt. — Insbesondere kann der neue Winkel ein rechter sein, wodurch das Parallelogramm in ein Rechteck verwandelt wird.

4. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel

unverändert bleibt, an die Stelle einer anliegenden Seite aber eine andere von gegebener Größe tritt.

Man lege vom Scheitel des Winkels aus die neue Seite auf die ursprüngliche Seite auf, und verbinde ihren Endpunkt mit der gegenüberstehenden Winkelspitze; so ist dadurch das gegebene Dreieck als die Summe oder als die Differenz zweier Dreiecke dargestellt, je nachdem die neue Seite kleiner oder größer als die ursprüngliche ist. Das eine von diesen Dreiecken, dasjenige, welches den bleibenden Winkel enthält, bleibt unverändert; das andere wird umgelegt, indem man von dem Endpunkte der ursprünglichen Seite eine Parallele mit der Verbindungslinie zieht, und den Punkt, in welchem sie die gegenüberstehende Seite schneidet, mit dem Endpunkte der neuen Seite verbindet.

Ebenso löst sich die Aufgabe:

5. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, so daß ein Winkel (mithin alle) ungeändert bleibt, an die Stelle einer bestimmten Seite aber eine andere von gegebener Größe tritt.

6. Ein Viereck in ein Dreieck zu verwandeln.

Man zerlege das Viereck durch eine Diagonale in 2 Dreiecke; lasse das eine derselben unverändert, und verwandle das andere so, daß die Diagonale als Grundlinie unverändert bleibt, die Spitze aber in eine der beiden (verlängerten) Seiten des andern Dreiecks fällt.

7. In derselben Weise läßt sich jedes Vieleck in ein anderes verwandeln, welches eine Seite weniger hat; demnach successive in ein Dreieck und folglich auch in ein Rechteck.

II. Theilungsaufgaben.

Die allgemeine Aufgabe, welche hier gelöst wird, ist: Eine gradlinige Figur in beliebig viele gleiche Theile zu theilen durch grade Linien, welche von einem Punkte des Umfangs oder von einem Punkte im Innern der Figur ausgehen. Beide Aufgaben werden auf die eine Theilungsaufgabe: „Ein Dreieck in beliebig viele gleiche Theile zu theilen durch grade Linien, welche von einem Eckpunkte ausgehen“; und auf eine einfache oder mehrfache Anwendung der Verwandlungsaufgaben unter I. zurückgeführt.

1. Ein Dreieck in beliebig viele gleiche Theile zu theilen durch grade Linien, welche von einem Eckpunkte ausgehen.

Man theile die gegenüberstehende Dreiecksseite in die gegebene Anzahl gleicher Theile, und verbinde die Theilungspunkte mit der gegenüberstehenden Winkelspitze, so hat man das Dreieck in ebenso viele Dreiecke getheilt, welche sämmtlich gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, also einander gleich sind.

2. Ein Viereck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen durch grade Linien, welche von einem Eckpunkte ausgehen.

Man verwandle das Viereck nach I. 6. in ein Dreieck, welches den bestimmten Eckpunkt zur Spitze und eine verlängerte Vierecksseite zur Grundlinie hat, und theile dasselbe nach 1. Diejenigen Theilungslinien des Dreiecks, welche ganz innerhalb des Vierecks liegen, sind auch Theilungslinien des Vierecks; die Theilungslinien des Dreiecks, bei welchen das nicht der Fall ist, sind nicht Theilungslinien des Vierecks; sie begrenzen aber mit der Diagonale des

Vierecks und den betreffenden Stücken der Dreiecksseite Dreiecke, welche sich nach I. 2. so umformen lassen, daß die Diagonale als Dreiecksseite unverändert bleibt, die gegenüberstehende Spitze aber in die anstoßende Vierecksseite verlegt wird.

3. In der Aufgabe 2. ist gleichzeitig die enthalten:

Ein Dreieck in beliebig viele gleiche Theile zu theilen durch grade Linien, welche von irgend einem Punkte des Umfangs ausgehen.

Denn das Dreieck läßt sich als ein Viereck ansehen, in welchem der gegebene Punkt des Umfangs der vierte Eckpunkt ist (an welchem der innere Winkel freilich ein flacher ist).

4. Auf analoge Weise wird die Aufgabe gelöst: Irgend ein Vieleck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen durch grade Linien, welche von irgend einem Punkte des Umfangs — Eckpunkt oder nicht — ausgehen.

5. Ein gegebenes Vieleck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen durch grade Linien, welche von irgend einem Punkte im Innern der Figur ausgehen.

Während die vorigen Theilungsaufgaben vollkommen bestimmt waren, ist diese nicht bestimmt; sie hat unzählig viele Auflösungen, indem eine Theilungslinie von dem gegebenen Punkte aus nach willkürlicher Richtung gezogen werden kann. Man ziehe irgend eine solche, und verwandle dann das Vieleck in ein Dreieck, welches den gegebenen Punkt zum Eckpunkt, die gewählte Theilungslinie zu einer anliegenden, die Vielecksseite, nach welcher die Theilungslinie gezogen ist, zur gegenüberstehenden Seite hat, und verfähre dann in analoger Weise, wie bei den vorhergehenden Aufgaben.

§. 44. Abhängigkeit der Größe eines Parallelogramms von Grundlinie und Höhe.

1. Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. Oder: Ein Parallelogramm von gegebener Grundlinie ist seiner Höhe proportional.

Es sei das Verhältniß der Höhen zweier solcher Parallelogramme $\frac{a}{b}$, wo a und b ganze Zahlen sind, so läßt sich die Höhe des einen Parallelogrammes in a gleiche Theile, die des andern Parallelogrammes in b gleiche Theile theilen, und zwar werden die Theile der einen Höhe gleich den Theilen der andern Höhe sein. Zieht man in jedem der beiden Parallelogramme durch die Theilpunkte der Höhen Parallelen mit den Grundlinien, so zerfällt das eine Parallelogramm in a , das andere in b gleiche Parallelogramme, und zwar sind die Theile des einen Parallelogrammes gleich den Theilen des andern Parallelogrammes. Demnach ist das Verhältniß der Parallelogramme gleich dem Verhältniß der Höhen.

Anm. Ist das Verhältniß der Höhen irrational, so ist der Satz ebenfalls wahr; es ergibt sich das dadurch, daß jedes irrationale Verhältniß sich als die Grenze eines veränderlichen rationalen ansehen läßt; oder durch ein leichtes indirektes Beweisverfahren. Für Anfänger, welche nicht schon anderweitig mit irrationalen Verhältnissen bekannt sind, scheint diese Betrachtung nicht zweckmäßig. — Dasselbe ist für 2 zu bemerken.

Folgerung. Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen. — Oder: Ein Dreieck von gegebener Grundlinie ist seiner Höhe proportional.

2. Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien. — Oder: Ein Parallelogramm von gegebener Höhe ist seiner Grundlinie proportional.

Beweis wie bei 1.

Folgerung. Dreiecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien. — Oder: Ein Dreieck von gegebener Höhe ist seiner Grundlinie proportional.

3. Das Verhältniß zweier Parallelogramme ist zusammengesetzt aus dem Verhältniß ihrer Grundlinien und dem ihrer Höhen (d. h. es ist gleich dem Produkt dieser beiden Verhältnisse. S. Arithm. §. 122).

Man bezeichne die beiden Parallelogramme mit P und P'; ihre Grundlinien und Höhen resp. mit G, H; G', H'; und denke sich ein drittes Parallelogramm P'', welches mit dem einen, z. B. mit P gleiche Höhe H, und mit dem andern P' gleiche Grundlinie G', hat, so hat man

$$\text{nach (2)} \quad \frac{P}{P''} = \frac{G}{G'}$$

$$\text{und nach (1)} \quad \frac{P''}{P'} = \frac{H}{H'}$$

also durch Multiplikation:

$$\frac{P}{P'} = \frac{G}{G'} \cdot \frac{H}{H'}$$

Bersteht man unter G G' H H' die Maaszahlen der betreffenden Linien nach irgend einer Einheit, so kann man die Brüche rechts multipliciren, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt; man hat dann

$$\frac{P}{P'} = \frac{GH}{G'H'}$$

d. h. Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte der Maaszahlen ihrer Grundlinien und Höhen. — Diesen Satz spricht man abkürzend aus: Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe. Oder: Ein Parallelogramm ist dem Produkte aus Grundlinie und Höhe proportional.

Folgerung. Das Verhältniß zweier Dreiecke ist zusammengesetzt aus dem Verhältniß ihrer Grundlinien und dem ihrer Höhen, (d. h. es ist gleich dem Produkte dieser beiden Verhältnisse). — Oder: Dreiecke verhalten sich wie die Produkte der Maaszahlen ihrer Grundlinien und ihrer Höhen. — Oder abkürzend: Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe. — Oder: Ein Dreieck ist dem Produkte aus Grundlinie und Höhe proportional.

(Uebungssatz: Parallelogramme, welche einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der den gleichen Winkel einschließenden Seiten. — Ebenso Dreiecke.)

§. 45. Ausmessung der gradlinigen Figuren.

Die Aufgabe der Ausmessung der gradlinigen Figuren ist im Allgemeinen, das Verhältniß einer gradlinigen Figur zu irgend einer andern gradlinigen Figur zu ermitteln. Diese Vergleichung läßt sich unmittelbar anführen, indem jede gradlinige Figur in ein Dreieck, oder auch in ein Parallelogramm verwandelt werden kann; so aufgefaßt, ist die Aufgabe der Ausmessung gradliniger Figuren im Vorigen vollständig gelöst. — In den meisten Fällen des praktischen Lebens ist es jedoch angemessener, die Vergleichung mittelbar durch eine Hülfeinheit auszuführen; als Hülfeinheit wählt man ein Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist. Diese besondere Aufgabe der Vergleichung einer gradlinigen Figur mit einem Quadrate, dessen Seite die Längeneinheit ist, soll hier besonders behandelt werden.

Versteht man in der Gleichung

$$\frac{P}{P'} = \frac{G}{G'} \cdot \frac{H}{H'}$$

unter P' ein Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit ist, so ist G' sowohl wie H' die Längeneinheit; dann ist $\frac{P}{P'}$ die Maafzahl des Paral-

lelogrammes P , $\frac{G}{G'}$ die Maafzahl seiner Grundlinie, $\frac{H}{H'}$ die Maafzahl seiner Höhe, und der durch jene Gleichung ausgedrückte Satz läßt sich dann so aussprechen:

Die Maafzahl eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt der Maafzahl der Grundlinie mit der Maafzahl der Höhe, vorausgesetzt, daß man als Flächeneinheit dasjenige Quadrat annimmt, dessen Seite die Längeneinheit ist.

Abkürzend wird dieser Satz ausgesprochen:

Ein Parallelogramm ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe. $p = gh$.

Folgerung. Ein Dreieck ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

1. Ausmessung des Quadrates. Man mißt eine Seite nach der Längeneinheit, und multiplicirt die erhaltene Maafzahl mit sich selbst. (Ist die Länge der Quadratseite durch eine mehrnamig benannte Zahl gegeben, so muß diese natürlich auf eine einnamige zurückgeführt werden.)

Die Grundeinheit des Längenmaafes ist in Preußen die Ruthe; die des Flächenmaafes demnach die Quadratruthe; d. h. ein Quadrat, dessen Seite eine Ruthe ist. — Erklärung von: Quadratfuß, Quadrat Zoll, Quadratlinie, Quadratmeile. Verhältniß derselben zu einander.

2. Ausmessung des Rechtecks.

3. Ausmessung des schiefwinkligen Parallelogramms.

4. Ausmessung des Dreiecks.

5. Ausmessung des Vierecks überhaupt. — Man zerlege das Viereck durch eine Diagonale in 2 Dreiecke, und messe dieselben.

Damit man möglichst wenige, nämlich 3 Linien zu messen habe, betrachte man die Diagonale als gemeinsame Grundlinie.

6. Ausmessung des Trapezes insbesondere. — Sie läßt sich ebenso ausführen, wie die jedes Vierecks; doch läßt sich hier der Zweck, daß man nur 3 Linien zu messen brauche, auch dadurch erreichen, daß man die beiden Parallelseiten als Grundlinien betrachtet; dann haben die beiden Dreiecke dieselbe Höhe, nämlich die Entfernung der beiden Parallelseiten von einander, welche man auch die Höhe des Trapezes nennt. Bezeichnet man die beiden Parallelseiten des Trapezes mit a und b , die Höhe mit h , so ist der Ausdruck für den Inhalt des Trapezes $\frac{1}{2} (a+b) h$. Demnach ist das Trapez gleich einem Dreieck, welches die Summe der Parallelseiten des Trapezes zur Grundlinie und die Höhe desselben zur Höhe hat; oder auch gleich einem Parallelogramme, welches die halbe Summe der beiden Parallelseiten zur Grundlinie, und die Höhe desselben zur Höhe hat.

7. Ausmessung eines Vielecks.

a. Durch Zerlegung in Dreiecke.

b. Durch Zerlegung in Trapeze. Man fällt zu dem Ende am besten von einem Eckpunkte ein Perpendikel auf die entfernteste Vielecksseite, und fällt von den einzelnen Eckpunkten Lothe auf dieses Perpendikel.

Zur Größenvergleichung der Quadrate insbesondere.

§. 46. 1. Das Quadrat der Summe zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Linien plus dem doppelten Rechtecke aus beiden Linien.

Es seien die Maaszahlen der beiden Linien nach irgend einer Einheit a und b , die Maaszahl ihrer Summe also $(a+b)$, so ist die Maaszahl des Quadrates der Summe $= (a+b) (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$.

Dieses Resultat läßt sich durch Zeichnung anschaulich machen, indem man über der Summe der beiden Linien a und b ein Quadrat errichtet, und auf 2 anstoßenden Seiten desselben in den Punkten, welche von dem ihnen gemeinsamen Eckpunkte die Entfernung a oder die Entfernung b haben, Perpendikel errichtet, welche man bis zu den gegenüberstehenden Seiten verlängert. Das Quadrat zerfällt dadurch in 4 Parallelogramme: 2 Quadrate, von welchen das eine die Seite a , das andere die Seite b hat; und 2 gleiche Rechtecke, von denen jedes a zur einen und b zur andern Seite hat.

2. Das Quadrat der Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Linien minus dem doppelten Rechtecke aus beiden Linien.

Es seien die Maaszahlen der beiden Linien a und b , ihre Differenz also $(a-b)$, so ist die Maaszahl des Quadrates der Differenz $= (a-b) (a-b) = a^2 - 2ab + b^2$.

Auch dieses Resultat läßt sich durch Zeichnung anschaulich machen, indem man über der Differenz der beiden Linien a und b ein Quadrat errichtet, und auf 2 anstoßenden Seiten in den Punkten ihrer Verlängerungen, welche von dem ihnen gemeinsamen Eckpunkte die Entfernung a haben, Perpendikel errichtet, welche man bis zum gegen-

seitigen Durchschnitt verlängert. Dann erscheint das Quadrat der Differenz als die Differenz des Quadrates des Minuenden a und eines Sechsecks, welches 5 rechte Winkel und einen Winkel von 3 Rechten hat. Dieses zerfällt durch die Verlängerung einer Seite des Quadrates der Differenz in 2 Rechtecke, von welchen das eine a und b , das andere $a-b$ und b zu Seiten hat; dieses zweite läßt sich sogleich durch die Verlängerung noch einer Seite des Quadrates der Differenz als die Differenz eines Rechtecks, welches a und b zu Seiten hat, und eines Quadrates, welches b zur Seite hat, darstellen.

§. 47. Pythagoräischer Lehrsat. Das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Denn das Quadrat der Hypotenuse läßt sich in 2 Rechtecke zerlegen, von denen jedes gleich dem anliegenden Kathetenquadrat ist. — Man fälle zu dem Ende ein Perpendikel von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse, und verlängere es bis zur gegenüberstehenden Seite des Hypotenusenquadrates. Um zu zeigen, daß jedes der beiden so entstehenden Rechtecke gleich dem anliegenden Kathetenquadrat ist, verbinde man die Spitze des rechten Winkels mit der nicht mit ihr verbundenen Ecke des einen Rechtecks; dadurch entsteht ein Dreieck, begrenzt von dieser Verbindungslinie, einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks und einer Seite des Hypotenusenquadrates; dieses Dreieck ist gleich dem halben Rechtecke. Dreht man dieses Dreieck um diejenige seiner Ecken, an welcher der Winkel ein stumpfer ist, und zwar so, daß die Drehung gleich einem rechten Winkel ist, nach der Seite des Kathetenquadrates hin, so kommt es in solche Lage, daß es mit diesem Kathetenquadrat 1 Seite und die zugehörige Höhe gemein hat, woraus man erkennt, daß es auch halb so groß ist, wie dieses Kathetenquadrat. Daraus folgen die obigen Behauptungen.

§. 48. Folgerungen.

1. Das Quadrat einer Kathete ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt. („Abschnitte der Hypotenuse“ sollen immer die durch das Perpendikel von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gebildeten Abschnitte sein). — Oder: Jede Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt.

2. Das Quadrat des Perpendikels (aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse) ist gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse. — Oder: Das Perpendikel ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

3. Die Quadrate der beiden Katheten verhalten sich, wie die entsprechenden Abschnitte der Hypotenuse.

Grundaufgabe. Zu 2 gegebenen Linien die mittlere Proportionale zu konstruieren.

2 Auflösungen nach 1 und 2, mit Hülfe von §. 20. C. 3.

Diese Aufgabe ist dieselbe wie die:

Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Da jede gradlinige Figur in ein Rechteck verwandelt werden kann

(s. §. 43), so läßt sich hiernach jede gradlinige Figur in ein Quadrat verwandeln.

§. 49. Erklärung. Wenn man von den beiden Endpunkten einer Linie Perpendikel auf eine andre Linie fällt, so nennt man das hierdurch auf dieser abgeschnittene Stück die Projektion jener Linie auf diese.

§. 50. In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten plus oder minus dem doppelten Rechteck aus der einen dieser beiden Seiten und der Projektion der andern Seite auf sie, je nachdem der gegenüberliegende Winkel ein stumpfer oder ein spitzer ist.

Man bezeichne die eine Seite mit c , die beiden andern mit a und b ; mache die Seite c zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, indem man von einem Eckpunkte desselben auf die gegenüberliegende Seite (a) ein Loth fällt; bezeichne dieses Loth mit l ; so ist dadurch die Seite b auf die Seite a projectirt; diese Projektion heiße p so ist

$$c^2 = l^2 + (a \pm p)^2 = l^2 + a^2 + p^2 \pm 2ap$$

l ist aber auch die Kathete eines zweiten rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse b und dessen andre Kathete p ist, so daß $l^2 = b^2 - p^2$ mithin

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ap$$

Anm. Die Sätze §. 46 und §. 47 lassen sich als Grenzfälle dieses Satzes ansehen.

Fünftes Capitel.

Formvergleichung gradliniger Figuren.

Vorbemerkung. Die Form eines räumlichen Gebildes hängt, außer von seinen Winkeln, offenbar von den Verhältnissen der dasselbe begrenzenden Linien ab. Es werden deshalb zunächst einige besonders wichtige Linienverhältnisse an Figuren betrachtet.

§. 51. 1. Wenn 2 sich schneidende Linien von 2 einander parallelen Linien durchschnitten werden, so entstehen auf den beiden geschnittenen Linien 2 mal 3 Abschnitte, welche einander paarweise entsprechen; das Verhältniß der beiden einem Paare angehörigen Abschnitte ist für alle 3 Paare dasselbe.

Derselbe Satz läßt sich auch so aussprechen:

Das Verhältniß je zweier Abschnitte der einen Linie ist gleich dem Verhältniß der entsprechenden Abschnitte der andern Linie. (Vertauschung der mittlern Glieder der Proportion. S. Arithm. §. 122.)

In der letzten Form läßt es sich dadurch beweisen, daß man die Linienverhältnisse auf Dreiecksverhältnisse zurückführt, indem man die Linien je eines Verhältnisses zu Grundlinien von Dreiecken macht, welche dieselbe Spitze haben, nämlich den Durchschnitt einer der beiden Parallelen mit derjenigen Linie, welcher die Glieder des betreffenden Verhältnisses nicht angehören. — Die Gleichheit dieser beiden Dreiecksverhältnisse erkennt man sehr leicht.

2. Umkehrung. Wenn 2 sich durchschneidende Linien von 2 andern Linien so durchschnitten werden, daß das Verhältniß eines Paares entsprechender Abschnitte gleich dem Verhältniß eines andern Paares entsprechender Abschnitte ist, so sind die schneidenden Linien parallel.

Oder: Wenn das Verhältniß zweier Abschnitte der einen Linie gleich ist dem Verhältniß der entsprechenden Abschnitte der andern Linie ist, so sind die schneidenden Linien parallel.

Man führt die Linienverhältnisse wieder, wie in 1, auf Dreiecksverhältnisse zurück, aus deren Gleichheit sich die Gleichheit eines Paares von Dreiecken auf gemeinsamer Grundlinie ergibt; daraus ergibt sich ferner die Gleichheit ihrer Höhen, und dadurch der Parallelismus der schneidenden Linien.

§. 52. Folgerungen.

1. Wenn 2 geneigte Linien von mehreren Parallel-Linien geschnitten werden, so entstehen auf den beiden geneigten Linien 2 Reihen von Abschnitten welche einander paarweise entsprechen. Das Verhältniß der beiden, einem Paare angehörigen Abschnitte ist für alle Paare dasselbe.

2. Wenn auf den Schenkeln eines Winkels durch eine grade Linie Stücke abgeschnitten werden, so ist das Verhältniß dieser Stücke nur von der Richtung dieser graden Linie, nicht von ihrer Entfernung vom Scheitel abhängig; und umgekehrt: die Richtung der graden Linie ist durch das Verhältniß der Schenkel vollständig bestimmt.

3. Wenn in einer Ebene mehrere gegebene parallele Linien durch irgend eine andre grade Linie geschnitten werden, so ist das Verhältniß je zweier auf der schneidenden Linie entstehenden Abschnitte von der Lage und Richtung der schneidenden Linie unabhängig.

§. 53. Wenn 2 geneigte grade Linien von 2 einander parallelen graden Linien durchschnitten werden, so ist das Verhältniß der auf den beiden Parallelen abgegrenzten Stücke gleich dem Verhältniß der entsprechenden Abschnitte auf einer der geneigten Linien (die Abschnitte bis zum Durchschnittspunkte der geneigten Linien gerechnet).

Denn wenn man von einem Endpunkte der einen parallelen Linie eine grade Linie parallel mit der gegenüberstehenden geneigten Linie bis zur andern parallelen Linie zieht, so überträgt man dadurch die eine der beiden parallelen Linien in die andere, und der Satz ist dadurch auf §. 51. 1. zurückgeführt.

Dieser Satz läßt keine einfache Umkehrung zu.

§. 54. Folgerungen.

1. Wenn mehrere durch einen Punkt gehende Linien von 2 Parallelen geschnitten werden, so entstehen auf den beiden Parallelen 2 Reihen von Abschnitten, welche einander paarweise entsprechen. Das Verhältniß der beiden einem Paare angehörigen Abschnitte ist für alle Paare dasselbe. — Oder auch: das Verhältniß irgend zweier Abschnitte der einen der beiden Parallelen ist gleich dem Verhältniß der entsprechenden Abschnitte der andern.

2. Wenn mehrere durch einen gegebenen Punkt gehende feste Linien von einer andern Linie geschnitten werden, so ist das Verhältniß irgend zweier Abschnitte dieser Linie nur von der Richtung dieser Linie abhängig, nicht von ihrer Entfernung vom gemeinsamen Durchschnittspunkte; er bleibt also ungeändert, wenn die schneidende Linie parallel mit sich verschoben wird.

§. 55. Grundaufgaben.

1. Zu 3 gegebenen graden Linien die vierte Proportionale zu finden.

Auflösung nach §. 49 oder §. 50. In den meisten Fällen ist folgende Construction die angemessenste:

Man trage die beiden Mittelglieder der Proportion auf den 2 verschiedenen Schenkeln eines beliebigen Winkels vom Scheitel aus ab; auf einem derselben das erste Glied, ebenfalls vom Scheitel aus; verbinde den Endpunkt dieses ersten Gliedes mit dem Endpunkte des Mittelgliedes auf dem andern Schenkel; ziehe von dem Endpunkte des andern Mittelgliedes eine Parallele mit dieser Verbindungslinie so schneidet diese auf dem andern Schenkel die vierte Proportionale ab.

Bezeichnet man die 3 gegebenen Linien mit a, b, c ; die gesuchte vierte Proportionale mit x , so wird die zwischen den Linien bestehende Abhängigkeit dargestellt durch die Proportion

$$a : b = c : x$$

Behandelt man a, b, c, x wie Zahlen (oder betrachtet man sie als die Maaszahlen der 4 Linien), so ist dieselbe Abhängigkeit ausgesprochen durch die Gleichung

$$x = \frac{bc}{a}$$

Die vorgelegte Aufgabe läßt sich dann auch so aussprechen:

Einen Ausdruck von der Form $\frac{bc}{a}$ zu konstruiren.

Die eben ausgesprochene Construktionsregel nimmt dann folgende Form an:

Man trage die Zählerfactoren auf den verschiedenen Schenkeln eines beliebigen Winkels vom Scheitel aus ab; auf einem derselben den Nenner, ebenfalls vom Scheitel aus; verbinde den Endpunkt des Nenners mit dem Endpunkte des Zählerfactors auf dem andern Schenkel; ziehe vom Endpunkte des andern Zählerfactors eine Parallele mit der Verbindungslinie, so schneidet dieselbe auf dem andern Schenkel eine Linie $= \frac{bc}{a}$ ab.

2. Eine gegebene Linie nach gegebenen Linienverhältnissen zu theilen.

Aus §. 51 geht folgende Construktionsregel hervor.

Man setze die verhältnißbestimmenden Linien zu einer graden Linie an einander, lege diese Summe an die zu theilende Linie unter irgend einem Winkel an; verbinde die Endpunkte, und ziehe durch die Theilpunkte der Summe der Verhältnißlinien Parallelen mit der Verbindungslinie bis an die zu theilende Linie.

Ist insbesondre die gegebene Linie nur in 2 Theile nach dem Verhältniß zweier gegebenen Linien zu theilen, (und jede Theilung in beliebig viele Theile läßt sich auf mehrere Theilungen in 2 Theile zurückführen), so erhält man aus §. 53 folgende Construktionsregel.

Man lege die beiden verhältnißbestimmenden Linien an die zu theilende Linie in ihren Endpunkten nach entgegengesetzten Seiten in beliebiger aber gleicher Richtung (parallel) an, verbinde ihre End-

punkte, so theilt die Verbindungslinie die gegebene Linie in dem gegebenen Verhältniß.

Legt man die beiden verhältnißbestimmenden Linien in den Endpunkten nach derselben Seite in gleicher Richtung an, und zieht durch ihre Endpunkte eine Verbindungslinie bis zu der (verlängerten) gegebenen Linie, so erhält man einen neuen Punkt, welcher mit dem zuvor gefundenen Punkte das gemein hat, daß das Verhältniß seiner Entfernungen von den Endpunkten der gegebenen Linie dem gegebenen Verhältniß gleich ist. Man pflegt auch diesen Punkt einen Theilungspunkt der gegebenen Linie für das gegebene Verhältniß zu nennen, obgleich für ihn nicht die Summe der Theile, sondern die Differenz der Theile die gegebene Linie ist.

Solche 4 Punkte, wie die Endpunkte der gegebenen Linie und die Theilungspunkte, nennt man harmonische Punkte.

3. Durch die vorige Aufgabe sind auch folgende Aufgaben gelöst.

a) Eine gegebene Linie nach dem Verhältniß zweier gegebenen Rationalzahlen zu theilen.

b) Eine gegebene Linie nach dem Verhältniß zweier gegebenen gradlinigen Figuren zu theilen.

c) Eine gegebene Linie nach dem Verhältniß zweier gegebenen Quadratwurzeln aus Rationalzahlen zu theilen.

Man kann nämlich jedes dieser Verhältnisse auf ein Linienverhältniß zurückführen. Denn

a) Jedes Verhältniß zweier Rationalzahlen läßt sich auf ein Verhältniß zweier ganzen Zahlen zurückführen und dieses sehr einfach auf ein Verhältniß zweier Linien.

b) Jede 2 gradlinigen Figuren lassen sich in Dreiecke von gleichen Höhen verwandeln, und diese verhalten sich wie ihre Grundlinien. Sind die beiden gegebenen Figuren Quadrate, so läßt sich das Verhältniß der beiden Quadrate bequemer nach S. 48. 3. in ein Verhältniß zweier Linien verwandeln.

c) Ebenso läßt sich nach S. 48. 3. das Verhältniß zweier Quadratwurzeln aus Rationalzahlen auf ein Linienverhältniß zurückführen. Man mache zu dem Ende 2 Linien, deren Verhältniß gleich dem Verhältniß der beiden gegebenen Rationalzahlen ist, zu den Abschnitten der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist das Verhältniß der Katheten desselben Dreiecks gleich dem gegebenen Quadratwurzel-Verhältniß.

4. Eine gradlinige Figur durch grade Linien, welche von einem Punkte des Umfangs oder einem Punkte im Innern der Figur ausgehen, zu theilen nach Verhältnissen, welche durch Linien, oder durch gradlinige Figuren, oder durch Rationalzahlen, oder durch Quadratwurzeln aus Rationalzahlen gegeben sind.

Diese Aufgabe ist eine Erweiterung der Aufgabe S. 43. II, welche nach 2 und 3 leicht auszuführen ist.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 56. Erklärung. Figuren heißen einander ähnlich, wenn sie gleiche Form haben.

Ein Dreieck ist seiner Form nach bestimmt durch die Größe seiner Winkel, und die Verhältnisse seiner Seiten.

Oder: Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in den Winkeln und in den Verhältnissen der entsprechenden Seiten.

Die hierin ausgesprochenen Bedingungen reduciren sich zunächst auf 4, da durch 2 Winkel eines Dreiecks der dritte, und durch 2 Seitenverhältnisse das dritte bestimmt ist. Diese Bedingungen sind aber theilweise von einander abhängig; dieselben auf möglichst wenige von einander unabhängig zurückzuführen, ist die Aufgabe der Aehnlichkeitsätze. (Vgl. §. 23.)

§. 57. Zunächst lassen sich die Sätze des §. 56 nach §. 51 und 53 auf folgende zurückführen:

Ein Dreieck ist seiner Form nach bestimmt durch die Größe und Lage eines Winkels und die Richtung der gegenüberstehenden Seite. Oder:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gemeinsam und die gegenüberstehenden Seiten parallel haben (oder wenn sie sich in solche Lage bringen lassen, daß dieses Statt findet).

§. 58. 1. Ein Dreieck ist seiner Form nach bestimmt durch 2 Winkel. Oder:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in 2 Winkeln übereinstimmen.

Denn: Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 1 Seite und 2 Winkel von bestimmter Lage gegen dieselbe. (§. 23. 1.) Von diesen Bestimmungsstücken ist die Seite zur Bestimmung der Form nicht erforderlich. Wenn man nämlich in einem Dreieck eine Seite so verschiebt, daß die Winkel ungeändert bleiben, also parallel mit sich selbst, und zwar einerseits bis zum Scheitel des gegenüberliegenden Winkels, andererseits bis ins Unendliche, so nimmt jede der Seiten des Dreiecks jede mögliche Größe an; für jede Größe einer der 3 Seiten existirt nur 1 Dreieck mit denselben Winkeln, für jede Größe derselben ist auf dem angegebenen Wege 1 Dreieck konstruirt; mithin sind alle Dreiecke konstruirt, welche dieselben 2 Winkel haben; diese sind aber alle einander ähnlich.

Hiermit übereinstimmend läßt sich der Beweis kürzer so aussprechen:

Man lege einen der beiden Winkel an irgend eine Stelle hin, so ist durch den andern Winkel die Richtung der gegenüberstehenden Seite bestimmt, mithin das Dreieck seiner Form nach bestimmt. (§. 57.)

Oder: Wenn man 2 Dreiecke hat, welche in 2 Winkeln übereinstimmen, so lege man sie so aufeinander, daß sie mit einem Paar

entsprechender Winkel sich decken, so daß die entsprechenden Schenkel auf einander liegen; dann sind die gegenüberstehenden Seiten parallel, folglich die Dreiecke ähnlich. (§. 57.)

2. Ein Dreieck ist seiner Form nach bestimmt durch das Verhältniß zweier Seiten und den eingeschlossenen Winkel. Oder:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie 2 Seiten proportional und die eingeschlossenen Winkel gleich haben.

Denn: Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel (§. 23. 2). Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen: Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 1 Seite, ihr Verhältniß zu einer zweiten und den eingeschlossenen Winkel. So ausgesprochen ist die 1 Seite nicht erforderlich zur Bestimmung der Form. Denn man denke sich ein Dreieck so verändert, daß das Verhältniß zweier Seiten und der eingeschlossenen Winkel ungeändert bleibt, indem man die dem Winkel gegenüberstehende Seite parallel mit sich selbst verschiebt, und zwar einerseits bis zum Scheitel des Winkels, andererseits bis ins Unendliche, so nimmt jede der Seiten, insbesondere eine der beiden einschließenden Seiten, jede denkbare Größe an; für jede denkbare Größe derselben existirt 1 Dreieck mit den gegebenen Bestimmungsstücken; für jede Größe ist 1 Dreieck konstruirt, mithin sind alle konstruirt; alle konstruirten aber haben gleiche Form, oder sind einander ähnlich.

Hiermit übereinstimmend läßt sich der Beweis kürzer so aussprechen:

Man lege den gegebenen Winkel an irgend eine Stelle hin, so ist durch das Verhältniß der einschließenden Seiten die Richtung der gegenüberliegenden Seite bestimmt (§. 52. 2), mithin das Dreieck seiner Form nach bestimmt.

Oder: Wenn man 2 Dreiecke hat, welche in dem Verhältnisse zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so lege man sie so auf einander, daß die gleichen Winkel sich decken, so daß die entsprechenden Schenkel auf einander fallen, so sind die gegenüberstehenden Seiten parallel, folglich die Dreiecke ähnlich.

3. Ein Dreieck ist seiner Form nach bestimmt durch das Verhältniß zweier Seiten und den der größeren von beiden gegenüberliegenden Winkel. Oder:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie 2 Seiten proportional und den der größeren gegenüberliegenden Winkel gleich haben.

Denn ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 2 Seiten und den der größeren gegenüberliegenden Winkel (§. 23. 3). Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen: Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 1 Seite, ihr Verhältniß zu einer zweiten Seite, und den Winkel, welcher der größeren von beiden gegenüberliegt. U. s. w. wie in 2.

Oder: Wenn man 2 Dreiecke hat, welche in dem Verhältnisse zweier Seiten und dem der größeren von beiden gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, so trage man die dem Winkel anliegende Seite des einen Dreiecks auf der entsprechenden Seite des andern Dreiecks

vom Scheitelpunkt aus ab, und ziehe vom Endpunkte aus eine Parallele mit der dem Winkel gegenüberstehenden Seite, so erhält man ein Dreieck, welches dem einen der beiden Dreiecke ähnlich, dem andern kongruent ist, woraus die Ähnlichkeit der gegebenen Dreiecke folgt.

§. 4. Ein Dreieck ist seiner Form nach bestimmt durch die Verhältnisse seiner 3 Seiten. Oder:

zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie ihre Seiten proportional haben.

Denn ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch seine 3 Seiten. Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen: Ein Dreieck ist vollständig bestimmt durch 1 Seite und ihre Verhältnisse zu den beiden andern Seiten u. s. w. wie in 2.

Oder: Wenn man 2 Dreiecke hat, welche in den Verhältnissen ihrer entsprechenden Seiten übereinstimmen, so trage man eine Seite des einen Dreiecks auf der entsprechenden Seite des andern Dreiecks von einem Eckpunkte aus ab, und ziehe von ihrem Endpunkte aus eine Parallele mit der jenem Eckpunkte gegenüberliegenden Dreiecksseite, so erhält man ein Dreieck, welches dem einen der gegebenen Dreiecke ähnlich, dem andern kongruent ist, woraus die Ähnlichkeit der gegebenen Dreiecke folgt.

§. 59. Folgerungen.

A. 1. Vom rechtwinkligen Dreieck.

Ein rechtwinkliges Dreieck ist seiner Form nach bestimmt

a. durch 1 spitzen Winkel

b. durch das Verhältniß zweier Seiten von bestimmter Lage (gegen den rechten Winkel).

2. Vom gleichschenkligen Dreieck.

Ein gleichschenkliges Dreieck ist seiner Form nach bestimmt

a. durch 1 Winkel von bestimmter Lage (gegen die Grundlinie).

b. Durch das Verhältniß der Grundlinie zu einer der beiden gleichen Seiten.

3. Vom gleichseitigen Dreieck.

Alle gleichseitigen Dreiecke sind ähnlich.

B. 1. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich entsprechende Höhen wie entsprechende Seiten.

2. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Umfänge wie entsprechende Seiten.

§. 60. Ähnlichkeit der Vielecke (mit Einschluß der Vierecke).

1. Ein Vieleck ist seiner Form nach bestimmt durch seine in bestimmter Reihenfolge zu nehmenden Winkel, und die Verhältnisse seiner in bestimmter Lage gegen die Winkel zu nehmenden Seiten. Oder:

Vielecke sind ähnlich, wenn sie die Winkel in gleicher Reihenfolge genommen gleich und die entsprechenden Seiten proportional haben.

Die hierin enthaltenen Bedingungen sind theilweise von einander abhängig; sie lassen sich im Allgemeinen auf $2n - 4$ von einander

unabhängige zurückführen, wenn n die Anzahl der Seiten des Vielecks ist. (Vgl. S. 34. Anm. und S. 36.)

2. Ein Vieleck ist seiner Form (und Lage) nach bestimmt durch einen der Größe und Lage nach bestimmten Winkel, durch die Richtungen der von dem Scheitel dieses Winkels ausgehenden Diagonalen, und durch die Richtungen der diesem Winkel nicht anliegenden Seiten. Oder:

Zwei Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gemeinsam haben, je 2 entsprechende Eckpunkte mit dem Scheitel dieses Winkels in grader Linie liegen, und die übrigen entsprechenden Seiten parallel sind.

3. Ein Vieleck ist seiner Form nach bestimmt durch die Formen der Dreiecke, welche in bestimmter Ordnung zusammengesetzt das Vieleck bilden. — Oder:

Vielecke sind ähnlich, wenn sie aus ähnlichen Dreiecken auf ähnliche Weise zusammengesetzt sind.

Folgerungen.

A. Ein regelmäßiges Vieleck ist seiner Form nach bestimmt durch die Anzahl seiner Seiten. — Oder: Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

B. 1. In ähnlichen Vielecken verhalten sich entsprechende Diagonalen wie entsprechende Seiten.

2. In ähnlichen Vielecken verhalten sich die Umfänge wie entsprechende Seiten.

Grundaufgabe.

Eine gradlinige Figur zu konstruiren, welche einer gegebenen gradlinigen Figur ähnlich ist, und von welcher eine einer bestimmten Seite der gegebenen Figur entsprechende Seite gegeben ist.

§. 61. Vom Ähnlichkeitspunkte.

1. Wenn 2 gradlinige Figuren von gleich vielen Ecken, die einander in gleicher Reihenfolge paarweise entsprechen, so beschaffen und gelegen sind, daß die Verbindungslinien zweier entsprechenden Eckpunkte sämtlich durch einen Punkt gehen, und die Seiten der einen Figur den entsprechenden Seiten der andern Figur parallel sind, so sind die beiden Figuren ähnlich und ähnlich liegend. Der Durchschnittspunkt der Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte heißt Ähnlichkeitspunkt; er heißt äußerer Ähnlichkeitspunkt, wenn je 2 entsprechende Punkte der ähnlichen Figuren vom Ähnlichkeitspunkte aus nach derselben Seite liegen; es heißt innerer Ähnlichkeitspunkt, wenn je 2 entsprechende Punkte der beiden Figuren vom Ähnlichkeitspunkte aus nach entgegengesetzten Seiten liegen.

2. Zwei ähnliche Figuren lassen sich auf unendlich viele Arten zu ähnlich liegenden machen, und zwar sowohl so, daß der Ähnlichkeitspunkt ein äußerer, als auch so, daß er ein innerer wird.

Man verbinde zu dem Ende sämtliche Eckpunkte der einen Figur A mit einem willkürlich als Ähnlichkeitspunkt gewählten Punkte o ihrer Ebene, suche auf einem dieser Strahlen, s , oder auf seiner Rück-

verlängerung über o hinaus einen Punkt von solcher Lage, daß das Verhältniß seine Entfernung vom Ähnlichkeitspunkte zu der Länge des Strahls gleich dem Verhältniß einer Seite der Figur B zu der entsprechenden Seite der Figur A ist, ziehe von diesem Punkte eine Parallele mit einer der beiden von dem im Strahle s gelegenen Eckpunkte der Figur A ausgehenden Seite a eine Parallele bis zu dem entsprechenden Strahle, von dem auf diesem Strahle gefundenen Punkte weiter, und so fort bis zum Anfangspunkte, so ist die konstruirte Figur die Figur B, welche jetzt der Figur A ähnlich liegend ist.

§. 62. Größenvergleichung ähnlicher Figuren.

1. Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Denn das Verhältniß irgend zweier Dreiecke ist zusammengesetzt aus dem Verhältniß ihrer Grundlinien und dem ihrer Höhen. Sind die Dreiecke einander ähnlich, und wählt man als Grundlinien derselben entsprechende Seiten, so sind auch die Höhen entsprechende, und da das Verhältniß entsprechender Höhen gleich dem Verhältniß entsprechender Seiten ist, so ist das Produkt des Verhältnisses der Grundlinien in das Verhältniß der Höhen gleich dem Quadrate des Verhältnisses der Grundlinien, oder gleich dem Verhältniß der Quadrate der Grundlinien, d. h. gleich dem Verhältniß der Quadrate irgend zweier entsprechender Seiten.

2. Zwei ähnliche gradlinige Figuren verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Folgerung. Wenn auf den 3 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks 3 ähnliche Figuren so errichtet sind, daß die 3 Seiten des Dreiecks entsprechende Seiten derselben sind, so ist die Summe der Figuren über den beiden Katheten gleich der Figur über der Hypotenuse.

Hierin liegt ein Mittel zur Auflösung der Aufgaben:

Die Summe zweier oder mehrerer ähnlichen Figuren in Form einer ähnlichen Figur darzustellen.

Die Differenz zweier ähnlichen Figuren in Form einer ähnlichen Figur darzustellen.

§. 63. Grundaufgaben.

A. Verwandlungsaufgaben.

1. Ein Dreieck in ein andres zu verwandeln, so daß ein Winkel unverändert bleibt und an die Stelle der gegenüberliegenden Seite eine Seite von gegebener Richtung tritt.

Aus dem Vorigen ergibt sich folgende Construktionsregel:

Wenn die Winkel α eines Dreiecks unverändert bleiben, an die Stelle der gegenüberstehenden Seite $\beta\gamma$ eine Seite von gegebener Richtung treten soll, so ziehe man von einem Endpunkte, β , dieser Seite eine Parallele mit der gegebenen Richtungslinie, welche die Seite $\alpha\gamma$ in einem Punkte, δ , schneidet, suche die mittlere Proportionale zwischen $\alpha\delta$ und $\alpha\gamma$, trage sie vom Punkte α aus auf $\alpha\gamma$ ab, und ziehe von ihrem Endpunkte aus eine Parallele mit der gegebenen Richtungslinie.

2. Auf 1. beruht die Auflösung folgender Aufgaben:

a. Ein Dreieck in ein andres zu verwandeln, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

b. Ein Dreieck in ein Trapez zu verwandeln, von welchem eine der beiden Parallelseiten und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

c. Eine gegebene gradlinige Figur in ein Dreieck von gegebener Form zu verwandeln.

d. Eine gegebene gradlinige Figur in irgend eine andre gradlinige Figur von gegebener Form zu verwandeln. Oder: Eine Figur zu konstruiren, welche einer gegebenen Figur gleich und einer andern gegebenen Figur ähnlich ist.

B. Theilungsaufgaben.

Die allgemeine hier zu lösende Aufgabe ist: Eine gradlinige Figur nach gegebenen Verhältnissen durch grade Linien von einer gegebenen Richtung zu theilen. Die einfachste hierin enthaltene Aufgabe: Ein Parallelogramm durch grade Linien, welche einer Seite parallel sind, nach gegebenen Verhältnissen zu theilen, beruht nicht auf den Ähnlichkeitsätzen, sondern einfach auf §. 44. Alle übrigen werden auf die einfachste Theilungsaufgabe §. 43. II. auf §. 55. 4 und die Verwandlungsaufgaben unter A zurückgeführt. Die hieher gehörigen Aufgaben sind:

1. Ein Dreieck nach gegebenen Verhältnissen zu theilen durch grade Linien, welche einer Seite parallel sind.

2. Ein Dreieck nach gegebenen Verhältnissen zu theilen durch grade Linien, welche irgend einer gegebenen Richtungslinie parallel sind.

3. Ein Trapez nach gegebenen Verhältnissen zu theilen durch grade Linien, welche einer der Parallelseiten parallel sind.

4. Ein Trapez nach gegebenen Verhältnissen zu theilen durch grade Linien, welche einer der nicht parallelen Seiten parallel sind.

5. Ein Viereck nach gegebenen Verhältnissen zu theilen durch grade Linien, welche einer Diagonale parallel sind.

6. Ein Viereck nach gegebenen Verhältnissen zu theilen durch grade Linien, welche einer Seite parallel sind.

7. Die allgemeine Aufgabe: Ein Viereck oder irgend ein Vieleck nach gegebenen Verhältnissen zu theilen durch grade Linien, welche irgend einer Richtungslinie parallel sind.

Sechstes Capitel.

Vom Kreise.

§. 64. Erklärung des Kreises, des Radius und des Mittelpunktes s. §. 4.

Die Kreislinie theilt die Ebene in 2 Räume, einen begrenzten und einen unbegrenzten; der begrenzte, die Kreisfläche, ist der Inbegriff aller der Punkte, deren Entfernung vom Mittelpunkte kleiner ist als der Radius; der unbegrenzte ist der Inbegriff aller der Punkte, deren Entfernung vom Mittelpunkt größer ist als der Radius.

Jede den Kreis treffende grade Linie wird eine Sekante des Kreises genannt; das begrenzte Stück derselben, welches innerhalb des Kreises liegt, heißt Sehne. Jede Sekante trifft den Kreis in 2 Punkten (§. 20. D. 1). — Eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, heißt Durchmesser; der Durchmesser ist gleich dem doppelten Radius, und somit größer als jede andre Sehne. — Wenn die Sehne $= 0$ wird, d. h. wenn die beiden Durchschnittspunkte der Sekante in einen zusammenfallen, so heißt die Sekante: Tangente; der Punkt, in welchem jene beiden Punkte zusammenfallen heißt Berührungspunkt. — Alle Punkte der Tangente mit Ausnahme des Berührungspunktes liegen außerhalb der Kreisfläche; der Berührungspunkt ist mithin unter allen Punkten der Tangente am nächsten beim Mittelpunkte gelegen, ist also der Fußpunkt des vom Mittelpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikels (§. 20. D. 1). — Die Tangente giebt die Richtung der Kreislinie im Berührungspunkte an.

Jedes Stück der Kreislinie heißt Bogen. Der Kreis hat die Eigenschaft, daß jeder Bogen desselben in der ganzen Kreislinie deckend herumgeführt werden kann. (Er hat diese Eigenschaft mit der graden Linie und der Schraubenlinie gemein.)

Ein Stück der Kreisfläche, welches von 2 Radien und einem Bogen begrenzt wird, heißt Ausschnitt oder Sektor. Ein Stück der Kreisfläche, welches von einer Sehne und einem Bogen begrenzt wird, heißt Abschnitt oder Segment.

Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte des Kreises liegt, wird, wenn er auf den Kreis bezogen wird, Centriwinkel genannt. Ein Winkel, dessen Scheitel in der Kreislinie, der Peripherie, liegt, wird, wenn er auf den Kreis bezogen wird, Peripheriewinkel, genannt. — Auch bei jeder andern Lage des Scheitels werden Winkel auf den Kreis, und zwar auf die zwischen ihren Schenkeln liegenden Bogen bezogen. — Die zu einem Ausschnitt, Abschnitt oder Winkel gehörigen Bogen heißen Standbogen.

§. 65. Zwischen einem Bogen, dem zugehörigen Centriwinkel, Ausschnitt, Abschnitt eines Kreises findet die gegenseitige Abhängigkeit statt, daß durch je eins dieser Stücke die übrigen vollständig bestimmt sind.

Durch jedes dieser Stücke ist auch die zugehörige Sehne vollständig bestimmt; umgekehrt ist durch die Sehne jedes dieser Stücke nur zweideutig bestimmt.

§. 66. Abhängigkeit zwischen Winkeln am Kreise und ihren Standbogen.

1. Der Centriwinkel ist seinem Standbogen proportional; folgt aus §. 65. Demnach können Centriwinkel und Kreisbogen einander gegenseitig zum Maße und beide als Maß der Drehung dienen. Da der Kreisbogen vorzugsweise als Maß der Drehung benutzt wird, so spricht man den Satz auch so aus:

Der Centriwinkel hat seinen Standbogen zum Maß.

2. Der Peripheriewinkel ist die Hälfte des Centriwinkels, der mit ihm denselben Standbogen hat. — Oder:

Der Peripheriewinkel hat seinen halben Standbogen zum Maß.

Der Peripheriewinkel kann gegen den Centriwinkel drei verschiedene Lagen haben; entweder so, daß der Scheitel des Centriwinkels (der Mittelpunkt des Kreises) in einem Schenkel des Peripheriewinkels liegt, oder so, daß er zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels liegt; oder so, daß er außerhalb liegt.

Im ersten Falle ist der Centriwinkel äußerer Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, in welchem der Peripheriewinkel Winkel an der Grundlinie ist, folglich der Centriwinkel doppelt so groß als der Peripheriewinkel.

Im zweiten Falle ziehe man durch den Scheitel des Peripheriewinkels einen Durchmesser, so erscheint der Peripheriewinkel als Summe zweier Peripheriewinkel, und der Centriwinkel entsprechend als die Summe zweier Centriwinkel, und zwar so, daß jeder der beiden Peripheriewinkel die Hälfte des entsprechenden Centriwinkels ist, mithin auch der gegebene Peripheriewinkel die Hälfte des gegebenen Centriwinkels.

Im dritten Falle ziehe man ebenso durch den Scheitel des Peripheriewinkels einen Durchmesser, so erscheint der Peripheriewinkel als die Differenz zweier Peripheriewinkel, und der Centriwinkel als die Differenz zweier Centriwinkel, und zwar so, daß jeder der beiden Pe-

peripheriewinkel gleich der Hälfte des entsprechenden Centriwinkels ist; mithin auch der gegebene Peripheriewinkel die Hälfte des gegebenen Centriwinkels.

Folgerungen.

a. Alle Peripheriewinkel auf demselben Standbogen sind gleich.

Die äußerste Lage, welche der Peripheriewinkel annehmen kann, ist die, in welcher der eine Schenkel in eine Tangente übergeht. Diesen Grenzfall kann man als besondern Satz so aussprechen:

Der Winkel welcher von einer Tangente und einer durch den Berührungspunkt gezogenen Sehne gebildet wird, ist gleich dem Peripheriewinkel, welcher auf dem zwischenliegenden Bogen steht.

Wenn der Standbogen des Peripheriewinkels ein Halbkreis ist, so ist derselbe ein rechter Winkel; mithin:

Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter.

Betrachtet man hiebei wieder den Grenzfall, in welchem ein Schenkel Tangente ist, so ergiebt sich auch hier der schon in S. 64 ausgesprochene Satz, daß die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit dem Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht steht.

b. Peripheriewinkel auf gleichen Bogen desselben Kreises sind einander gleich.

c. Peripheriewinkel, deren Standbogen sich zur Kreislinie ergänzen, sind supplementär.

3. Ein Winkel, dessen Scheitel innerhalb der Kreisfläche liegt, ist gleich der Summe zweier Peripheriewinkel auf seinen 2 Standbogen (indem man nämlich die Schenkel des Winkels über den Scheitel des Winkels hinaus verlängert, und sowohl den Bogen, welcher zwischen den Schenkeln des Winkels liegt, als auch den, welcher zwischen den Schenkeln des Scheitelwinkels liegt, als Standbogen des Winkels betrachtet). — Oder:

Ein Winkel, dessen Scheitel innerhalb der Kreisfläche liegt, hat die halbe Summe seiner Standbogen zum Maas.

Denn verbindet man den Punkt, in welchem der eine Schenkel die Peripherie trifft, mit dem Punkte, in welchem die Rückverlängerung des andern Schenkels die Peripherie trifft, so wird der gegebene Winkel äußerer Winkel an einem Dreieck, in welchem 2 Peripheriewinkel auf den Standbogen des gegebenen Winkels innere und nicht seine Nebenwinkel sind; der gegebene Winkel ist also gleich der Summe der beiden Peripheriewinkel.

4. Ein Winkel, dessen Scheitel außerhalb der Kreisfläche liegt, und dessen Schenkel den Kreis treffen, ist gleich der Differenz zweier Peripheriewinkel auf seinen 2 Standbogen. — Oder:

Ein Winkel, dessen Scheitel außerhalb der Kreisfläche liegt, und dessen Schenkel den Kreis treffen, hat die halbe Differenz seiner Standbogen zum Maas.

Denn man verbinde den Punkt, in welchem der eine Schenkel in

den Kreis hineintritt, mit dem Punkte, in welchem der andre Schenkel aus dem Kreise heraus tritt, so ist der gegebene Winkel innerer Winkel eines Dreiecks, in welchem der Peripheriewinkel auf dem einen seiner Standbogen ein anderer innerer, und der Peripheriewinkel auf dem andern seiner Standbogen äußerer Winkel und nicht Nebenwinkel eines von beiden ist. Der gegebene Winkel ist also die Differenz der beiden Peripheriewinkel.

Der Satz bleibt auch dann wahr, wenn einer der beiden Schenkel oder auch beide in Tangenten übergehen. — Ferner auch dann, wenn der Winkel $= 0$ ist; d. h. wenn seine Schenkel parallel sind. Dies spricht sich als besondrer Satz so aus:

Bogen zwischen parallelen Sehnen sind einander gleich.

§. 67. Grundaufgaben.

1. Durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Kreislinie eine Tangente an dieselbe zu ziehen.
2. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb eines gegebenen Kreises eine Tangente an denselben zu ziehen.
3. An einen gegebenen Kreis eine Tangente von gegebener Richtung zu ziehen.

§. 68. Eine Sehne bildet mit den beiden nach ihren Endpunkten gerichteten Radien ein gleichschenkliges Dreieck. Die Sätze des §. 20. E lassen sich also auf den Kreis übertragen, und lauten in Verbindung mit §. 65. so:

1. Das Perpendikel aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne halbt dieselbe und beide zugehörigen Bogen.
2. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit der Mitte einer Sehne steht auf dieser senkrecht und halbt die beiden zugehörigen Bogen.
3. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit der Mitte eines Bogens halbt die Sehne und steht auf ihr senkrecht.
4. Das Perpendikel in der Mitte einer Sehne errichtet geht durch den Mittelpunkt und halbt die beiden zugehörigen Bogen.

Läßt man die Sehne in eine Tangente übergehen, so nehmen die Sätze folgende Gestalt an:

- 1'. Das Perpendikel aus dem Mittelpunkte des Kreises auf eine Tangente trifft dieselbe im Berührungspunkte.
- 2'. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Berührungspunkte steht auf der Tangente senkrecht.
- 3'. Fällt mit 2' zusammen.
- 4'. Das Perpendikel im Berührungspunkte auf der Tangente errichtet geht durch den Mittelpunkt.

§. 69. Folgerungen.

1. Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher durch 2 gegebene Punkte geht, (welcher eine gegebene grade Linie zur Sehne hat), ist eine grade Linie, welche auf der Verbindungslinie in ihrer Mitte senkrecht steht.

Hierin liegt die Auflösung der Aufgabe: Durch 3 gegebene Punkte,

welche nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu legen. — Die Aufgabe ist eine vollständig bestimmte; d. h.?

2. Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher eine gegebene Linie in einem gegebenen Punkte berührt, ist eine grade Linie, nämlich das Perpendikel im Berührungspunkte.

3. Der geometrische Ort des Scheitels eines Winkels von gegebener Größe, dessen Schenkel durch 2 feste Punkte gehen, besteht aus 2 Kreisen, welche die Verbindungslinie zur gemeinsamen Sehne haben, und welche mit der gemeinsamen Sehne Winkel bilden, die dem gegebenen Winkel gleich sind. Ihre Construction ergiebt sich aus 1 und 2. — Die beiden Kreise sind gleich, und lassen sich zur Deckung bringen, indem man den einen um die Sehne als Axe herumdreht. — Jeder der beiden Kreise wird durch die Sehne in 2 Abschnitte getheilt; in einem dieser Abschnitte ist immer der gegebene Winkel innerer Winkel des von der Sehne und den Schenkeln des Winkels gebildeten Dreiecks; in dem andern ist er äußerer. — Für je 2 supplementäre Winkel ist der geometrische Ort derselbe.

§. 70. Die Größe der Sehne eines Kreises hängt von ihrer Entfernung vom Mittelpunkte ab, so daß sie um so kleiner ist, je größer ihre Entfernung vom Mittelpunkte ist.

Denn die halbe Sehne bildet mit dieser Entfernung und dem Radius ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse, der Radius, konstant ist; mithin ist auch die Summe der Kathetenquadrate constant; folglich das eine Kathetenquadrat um so kleiner, je größer das andere ist; folglich die eine Kathete um so kleiner, je größer die andere ist; die halbe Sehne also um so kleiner, je größer die Entfernung ist; folglich auch die ganze Sehne um so kleiner, je größer die Entfernung ist.

§. 71. A. Von einem Punkte in der Ebene eines Kreises lassen sich unzählig viele grade Linien an den Kreis ziehen; die kleinste unter ihnen ist das kleinere Durchmesserstück (wenn der Punkt außerhalb liegt, so wird der Verlängerungsabschnitt des Durchmessers mit Recht so genannt), die größte das größere Durchmesserstück. Jede der Linien ist um so größer, je größer der Bogen ist, den sie, vom Endpunkte des kleineren Durchmesserstücks an gerechnet, abschneidet. Paarweise sind sie einander gleich, und zwar sind diejenigen einander gleich, welche gleiche Bogen vom Endpunkte des kleineren Durchmesserstücks an abschneiden.

Denn die betreffende Linie bildet mit der Verbindungslinie des Punktes mit dem Mittelpunkte, und dem zugehörigen Radius ein veränderliches Dreieck, in welchem 2 Seiten, die Verbindungslinie und der Radius, unveränderlich sind, der eingeschlossene Winkel (Centriwinkel) veränderlich ist, auf welches also §. 25. 1. Anwendung findet.

Wenn insbesondere der Punkt außerhalb liegt, so sind 2 der Linien Tangenten; von denselben erkennt man leicht, daß sie ein Paar gleiche Linien bilden, indem der zwischen ihren Berührungspunkten liegende Bogen durch den Endpunkt des kleineren Durchmesserstücks halbirt wird. Hieraus ergiebt sich zugleich, daß der Winkel zweier

Tangenten durch die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Mittelpunkt des Kreises halbiert wird; ferner, daß die Berührungsehne, d. h. die Sehne, welche die beiden Berührungspunkte verbindet, auf jener Verbindungslinie senkrecht steht, und von ihr halbiert wird; ferner, daß, wenn von 2 gleichen Linien, welche von einem Punkte außerhalb eines Kreises an den Kreis gezogen werden, die eine Tangente ist, dann auch die andere Tangente ist.

B. 1. Wenn in der Ebene eines Kreises ein fester Punkt angenommen wird, so hat der geometrische Ort eines Punktes, welcher von dem festen Punkte eine gegebene Entfernung hat, keinen Punkt mit dem gegebenen Kreise gemein, wenn die gegebene Entfernung kleiner ist, als das kleinere Durchmesserstück; der Ortskreis wird von dem gegebenen Kreise umschlossen, wenn der feste Punkt innerhalb des gegebenen Kreises liegt; er liegt ganz außerhalb, wenn der feste Punkt außerhalb des gegebenen Kreises liegt.

2. Er hat einen Punkt mit dem gegebenen Kreise gemein, wenn die gegebene Entfernung gleich dem kleineren Durchmesserstück ist; dieser eine gemeinsame Punkt ist der Endpunkt des kleineren Durchmesserstücks; der Ortskreis hat mit dem gegebenen Kreise in diesem Punkte eine Tangente gemeinsam; der Ortskreis berührt den gegebenen Kreis. Der Ortskreis liegt wieder innerhalb oder außerhalb des gegebenen Kreises, je nachdem der feste Punkt innerhalb oder außerhalb des gegebenen Kreises liegt.

3. Er hat zwei Punkte mit dem gegebenen Kreise gemein, wenn die gegebene Entfernung größer ist, als das kleinere Durchmesserstück, und kleiner als das größere Durchmesserstück; die gemeinsamen Punkte sind gleich weit vom Endpunkte des kleineren Durchmesserstücks (auch gleich weit vom Endpunkte des größeren Durchmesserstücks) entfernt, und schneiden von da an gleiche Bogen ab; der Ortskreis hat mit dem gegebenen Kreise eine Sehne gemein; dieselbe steht auf dem Durchmesser senkrecht und wird von ihr halbiert.

4. Er hat einen Punkt mit dem gegebenen Kreise gemein, wenn die gegebene Entfernung gleich dem größeren Durchmesserstück ist. Der gemeinsame Punkt ist der Endpunkt des größeren Durchmesserstücks; der Ortskreis hat mit dem gegebenen Kreise in diesem Punkte eine Tangente gemeinsam; der Ortskreis berührt den gegebenen Kreis; er schließt den gegebenen Kreis ein.

5. Er hat keinen Punkt mit dem gegebenen Kreise gemein, wenn die gegebene Entfernung größer ist, als das größere Durchmesserstück: der Ortskreis schließt den gegebenen Kreis ein.

C. Zwei Kreise können demnach 3 verschiedene Lagen gegen einander haben; sie können nämlich keinen, oder einen, oder zwei Punkte gemeinsam haben; der zweite Fall ist die Grenze zwischen dem ersten und dritten.

1. Sie haben keinen Punkt mit einander gemein, wenn die Differenz der Radien größer als die Centrale (d. h. die Verbindungslinie der Mittelpunkte), oder ihre Summe kleiner als die Centrale ist; im ersten Falle schließt der größere Kreis den kleineren ein; im zweiten liegen sie neben einander. — Und umgekehrt.

2. Sie haben einen Punkt mit einander gemein, wenn die Differenz der Radien, oder die Summe der Radien gleich der Centrale ist. Dieser eine Punkt ist ein Punkt der Centrale (oder ihrer Verlängerung); in diesem Punkte haben sie eine Tangente gemeinsam. Im ersten Falle schließt der größere Kreis den kleineren ein; im zweiten liegen sie neben einander.

3. Sie haben zwei Punkte mit einander gemein, wenn die Differenz der Radien kleiner und die Summe der Radien größer als die Centrale ist. Die Verbindungslinie der gemeinsamen Punkte ist eine gemeinsame Sehne der beiden Kreise; sie steht auf der Centrale senkrecht und wird von ihr halbiert.

Ein besonderer Fall, der im Vorigen als Grenzfall enthalten ist, muß besonders erwähnt werden, nämlich der, wenn die beiden Mittelpunkte zusammenfallen; die Kreise heißen dann concentrisch; in jedem andern Falle heißen sie excentrisch.

§. 72. Wenn 2 Sekanten sich irgendwo (innerhalb oder außerhalb des Kreises) schneiden, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sekante gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der andern Sekante. — Unter Abschnitten der Sekante werden diejenigen Stücke derselben verstanden, welche von ihrem gegenseitigen Durchschnittpunkte einerseits und von ihren Durchschnittpunkten mit der Kreislinie andererseits begrenzt werden.

Denn faßt man die 4 Durchschnittpunkte der Sekanten mit der Kreislinie zu 2 Paaren in der Art zusammen, daß die 2 Punkte eines Paares nicht derselben Sekante angehören (was auf doppelte Art möglich ist), und verbindet die 2 Punkte eines jeden Paares durch eine grade Linie mit einander, so bilden diese Verbindungslinien mit je 2 Abschnitten der Sekanten Dreiecke, welche einander ähnlich sind, da ihre Winkel gleich sind; welche also die Seiten proportional haben; darin liegt der obige Satz.

Der Satz bleibt auch dann richtig, wenn eine der beiden Sekanten eine Tangente ist. Er heißt dann:

Wenn eine Tangente und eine Sekante sich außerhalb des Kreises schneiden, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Sekante; oder: das Quadrat der Tangente ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Sekante.

Der Satz bleibt auch dann richtig, wenn beide Sekanten in Tangenten übergehen; er spricht dann den schon früher (§. 71. A.) gefundenen Satz aus, daß die beiden von einem Punkte an einen Kreis gezogenen Tangenten einander gleich sind.

Es ergeben sich hier neue Auflösungen der Aufgaben §. 55. 1 und §. 48. Unter andern ergibt sich folgende bemerkenswerthe Regel für die Konstruktion einer mittleren Proportionale: Man konstruirt ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die halbe Summe, und dessen eine Kathete die halbe Differenz zweier gegebenen Linien ist, so ist die andere Kathete die mittlere Proportionale zwischen den beiden gegebenen Linien.

§. 73. Erklärung. Man nennt eine gradlinige Figur einem Kreise eingeschrieben, oder einen Kreis einer gradlinigen Figur

umschrieben, wenn die Eckpunkte der Figur Punkte der Kreislinie sind.

Man nennt eine gradlinige Figur einem Kreise umschrieben, oder einen Kreis einer gradlinigen Figur eingeschrieben, wenn die Seiten der Figur Tangenten des Kreises sind.

§. 74. 1. Jedem Dreieck läßt sich ein und nur ein Kreis umschreiben (§. 69. 1).

2. Jedem Dreieck lassen sich 4 Kreise einschreiben, von welchen einer innerhalb des Dreiecks liegt; die 3 andern liegen außerhalb, und zwar je über einer Seite des Dreiecks. — Denn der geometrische Ort eines Punktes, welcher von 2 gegebenen graden Linien gleich weit entfernt ist, besteht aus 2 graden Linien, welche die Winkel der gegebenen Linien halbiren, welche also auf einander senkrecht stehen. Bezeichnet man die 3 das Dreieck bildenden Linien mit a , b , c , so ist der geometrische Ort des Punktes, welcher von a und b gleich weit entfernt ist, ein Paar solcher Linien; der geometrische Ort des Punktes, welcher gleich weit von b und c entfernt ist, ist ein zweites Paar solcher Linien; diese beiden Linienpaare haben 4 Punkte mit einander gemein; jeder dieser 4 Punkte ist also gleich weit von a und b , und gleich weit von b und c , also auch gleich weit von a und c entfernt; d. h. jeder dieser 4 Punkte ist gleich weit von den 3 Linien a , b und c entfernt; folglich ist jeder dieser 4 Punkte Mittelpunkt eines Kreises, welcher die 3 Linien a , b und c berührt; und diese 4 Punkte sind die einzigen, welche diese Eigenschaft haben.

§. 75. 1. Nicht jedem Viereck läßt sich ein Kreis umschreiben.

Denn durch 3 Punkte ist ein Kreis vollständig bestimmt; ein Viereck im Kreise (wie man abkürzend ein Viereck nennt, welches einem Kreise eingeschrieben ist), hat also gewisse Eigenschaften, welche im engsten Zusammenhange mit der Bedingung stehen, daß ein Eckpunkt des Vierecks auf dem durch die 3 andern Eckpunkte bestimmten Kreise liegt.

a. In jedem Viereck im Kreise sind die gegenüberstehenden Winkel paarweise supplementär; und umgekehrt. (§. 66. 2. c. und §. 69. 3). — Folglich ist jedes einem Kreise eingeschriebene Parallelogramm rechtwinklig.

b. In jedem Viereck im Kreise sind 2 Winkel, welche von 1 Seite und 1 Diagonale gebildet werden, und derselben Vierecksseite gegenüberliegen, gleich; und umgekehrt. (§. 66. 2. und §. 69. 3.)

c. In jedem Viereck im Kreise schneiden sich die beiden Diagonalen so, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten der einen Diagonale gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der andern Diagonale ist; und umgekehrt. (§. 72.)

d. Zwei gegenüberstehende Seiten eines Vierecks im Kreise schneiden einander verlängert so, daß das Rechteck aus denjenigen Stücken der einen dieser beiden Linien, welche einerseits vom Durchschnittpunkte, andererseits

seits von den Eckpunkten des Vierecks begrenzt werden, gleich dem Rechteck aus den entsprechend genommenen Stücken der andern Linie ist; und umgekehrt. (§. 72.)

e. In jedem Viereck im Kreise ist das Rechteck aus den Diagonalen gleich der Summe der 2 Rechtecke aus den gegenüberstehenden Seiten des Vierecks.

Denn jede der beiden Diagonalen läßt sich so theilen, daß das Rechteck aus der ungetheilten Diagonale und dem einen Theile der getheilten Diagonale gleich dem Rechteck aus dem einen Paare gegenüberstehenden Vierecksseiten, und das Rechteck aus der ungetheilten Diagonale und dem andern Theile der getheilten Diagonale gleich dem Rechteck aus dem andern Paare gegenüberstehender Vierecksseiten ist. Zu dem Ende hat man nur einen der beiden Winkel, welche an irgend einem Eckpunkte durch eine Seite und die Diagonale gebildet werden, an die andere durch diesen Eckpunkt gehende Seite im Eckpunkte so anzulegen, daß er in das Viereck hineinfällt, und den zweiten Schenkel bis zur gegenüberstehenden Diagonale zu verlängern; so wird durch diesen Schenkel das Dreieck, welches die getheilte Diagonale als Seite und den in Betracht gezogenen Eckpunkt des Vierecks zum gegenüberstehenden Eckpunkte hat, in 2 Dreiecke getheilt, welche den beiden Dreiecken ähnlich sind, in welche das Viereck durch die ungetheilte Diagonale zerlegt wird.

Dieser Satz ist von großer historischer Wichtigkeit; er heißt nach seinem Entdecker Ptolemäus, welcher sehr umfassende Anwendungen von demselben machte, der Ptolemäische Lehrsatz.

Umkehrung. Wenn in einem Viereck das Rechteck aus den Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus den gegenüberstehenden Seiten ist, so läßt sich dem Viereck ein Kreis umschreiben.

Denn es läßt sich leicht, dem Obigen analog, zeigen, daß in einem Viereck, welchem sich kein Kreis umschreiben läßt, das Rechteck aus den Diagonalen kleiner als die Summe der Rechtecke aus den gegenüberstehenden Seiten ist.

f. Das Verhältniß der Diagonalen eines Vierecks im Kreise ist gleich dem Verhältnisse der beiden Summen je zweier Rechtecke, welche aus je 2 an den Eckpunkten der entsprechenden Diagonale zusammenstoßenden Seiten gebildet werden.

Bezeichnet man z. B. die 4 Seiten des Vierecks mit a, b, c, d die Diagonale, welche die Eckpunkte (ab) und (cd) mit einander verbindet, mit e, und die Diagonale, welche die Eckpunkte (ad) und (bc) mit einander verbindet, mit f, so ist

$$\frac{e}{f} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

Der Satz ist eine Folgerung aus (e).

2. Nicht jedem Viereck läßt sich ein Kreis einschreiben.

Denn durch 3 grade Linien (als Tangenten) ist ein Kreis 4deutig bestimmt. Ein Viereck um den Kreis (wie jedes einem Kreise umschriebene Viereck genannt wird), hat also gewisse Eigenschaften, welche im

engsten Zusammenhange mit der Bedingung stehen, daß eine Seite des Vierecks Tangente eines der 4 durch die 3 andern Seiten bestimmten Kreise ist. Es ergiebt sich hieraus eine Reihe von Sätzen, von denen der folgende hier Platz finden mag:

In jedem einem Kreise umschriebenen Vierecke ist die Summe eines Paares gegenüberstehender Seiten gleich der Summe des andern Paares gegenüberstehender Seiten; und umgekehrt.

Demnach ist jedes einem Kreise umschriebene Parallelogramm gleichseitig.

§. 76. 1. Jedem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis umschreiben.

Denn errichtet man in den Mitten zweier auf einander folgenden Seiten Perpendikel auf denselben, so ist der Durchschnittspunkt dieser Perpendikel gleich weit von den 3 diesen beiden Seiten angehörnden Eckpunkten entfernt; verbindet man also diesen Durchschnittspunkt mit jenen 3 Eckpunkten, so begrenzen diese Verbindungslinien mit den beiden Vielecksseiten 2 kongruente gleichschenklige Dreiecke; daraus folgt, daß die Verbindungslinien die entsprechenden Winkel halbiren. Verbindet man den Durchschnittspunkt mit einem 4ten zunächst folgenden Eckpunkte, so entsteht ein 3tes Dreieck, welches dem anliegenden kongruent ist, somit auch gleichschenkelig ist; der Durchschnittspunkt ist also von diesem Eckpunkt ebenso weit entfernt, wie von den 3 andern, und die Verbindungslinie des Durchschnittspunktes mit diesem 4ten Eckpunkte halbirt auch diesen 4ten Vieleckswinkel. Ebenso ergiebt sich ferner, daß der Durchschnittspunkt der beiden Perpendikel gleich weit von allen Eckpunkten entfernt, also der Mittelpunkt eines umschriebenen Kreises ist; ferner, daß die Verbindungslinien dieses Mittelpunktes mit den Eckpunkten die Vieleckswinkel sämmtlich halbiren; ebenso, daß die Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Vielecksseiten diese sämmtlich halbiren, und sämmtlich gleich groß sind.

Umgekehrt läßt sich jedem Kreise ein regelmäßiges Vieleck von beliebig großer Seitenzahl einschreiben, indem man die Peripherie in die gegebene Anzahl gleicher Theile theilt, und die Theilungspunkte der Reihe nach mit einander verbindet; denn das so entstehende Vieleck ist gleichseitig, weil alle Seiten Sehnen gleicher Bogen sind; es ist gleichwinklig, weil alle Winkel Peripheriewinkel auf gleichen Bogen sind.

2. Jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis einschreiben.

Denn nach 1. ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises gleich weit von allen Seiten entfernt, also auch der Mittelpunkt eines dem Vieleck eingeschriebenen Kreises.

Umgekehrt läßt sich jedem Kreise ein regelmäßiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl umschreiben, indem man die Peripherie in die gegebene Anzahl gleicher Theile theilt, und in den Theilungspunkten Tangenten an den Kreis legt, welche man bis zum Durchschnitte je zweier auf einander folgenden verlängert. Das so entstehende Vieleck ist gleichwinklig, da die Standbogen aller Winkel einander gleich sind, und die Winkel Tangentenwinkel sind.

Daraus ergibt sich, daß jedes durch eine Seite und den Mittelpunkt bestimmte Dreieck gleichschenkelig ist, indem jeder Tangentenwinkel durch die Verbindungslinie seines Scheitels mit dem Mittelpunkte halbiert wird, mithin jedes so bestimmte Dreieck an der Vielecksseite gleiche Winkel hat; daraus ergibt sich ferner, daß jede Seite durch den Berührungspunkt halbiert wird; ferner ist aus §. 71. A. bekannt, daß je 2 solche auf einer folgenden Hälfte zweier verschiedenen Seiten einander gleich sind; mithin sind auch die ganzen Seiten einander gleich, das Vieleck also gleichseitig.

§. 77. 1. Je größer die Seitenzahl des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks ist, um so weniger ist das Vieleck vom Kreise verschieden. Läßt man die Seitenzahl des eingeschriebenen Vielecks immer wachsen, so nähert sich das Vieleck dem Kreise immer mehr, und diese Näherung hat offenbar keine Grenze. — Man spricht das aus: Ein Kreis läßt sich als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten.

Die einfachste Art, wie man die Seitenzahl eines eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks ins Unendliche wachsen lassen kann, besteht darin, daß man dieselbe immer verdoppelt. Wenn man bei einem beliebigen, einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Vieleck sämtliche zu je einer Seite gehörige Bogen halbiert, so bestimmen die Halbierungspunkte mit den Eckpunkten des gegebenen Vielecks ein regelmäßiges Vieleck von doppelter Seitenzahl.

2. Je größer die Seitenzahl des einem Kreise umschriebenen regelmäßigen Vielecks ist, um so weniger ist das Vieleck vom Kreise verschieden. Läßt man die Seitenzahl des umschriebenen Vielecks immer wachsen, so nähert sich das Vieleck dem Kreise immer mehr, und diese Näherung hat offenbar keine Grenze. Auch hierin ist der Satz enthalten: Ein Kreis läßt sich als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten.

Die einfachste Art, wie man die Seitenzahl eines umschriebenen regelmäßigen Vielecks bis ins Unendliche wachsen lassen kann, besteht darin, daß man dieselbe fortwährend verdoppelt. Wenn man bei einem beliebigen, einem Kreise umschriebenen regelmäßigen Vieleck sämtliche zu je einem Winkel gehörige Bogen halbiert, und in den Halbierungspunkten Tangenten an den Kreis legt, so bestimmen diese Tangenten mit den Seiten des gegebenen Vielecks ein regelmäßiges Vieleck von doppelter Seitenzahl.

§. 78. In regelmäßigen Vielecken von gleicher Seitenzahl verhalten sich die Radien der eingeschriebenen Kreise, und auch die Radien der umschriebenen Kreise wie die Umfänge. — Oder: Das Verhältniß des Umfangs eines regelmäßigen Vielecks sowohl zum Radius des eingeschriebenen Kreises als auch zum Radius des umschriebenen Kreises ist vollständig bestimmt durch seine Seitenzahl.

Kreismessung.

§. 79. Die Aufgabe der Kreismessung ist: Vergleichung eines Kreisbogens mit einem Bogen desselben Kreises, insbesondere mit der

ganzen Kreislinie; Vergleichung eines Kreisbogens, insbesondere der ganzen Kreislinie mit irgend einer Länge; Vergleichung der Kreisfläche mit irgend einer andern begrenzten Fläche, und zwar, da bisher nur von gradlinig begrenzten Flächen die Rede gewesen ist, mit einer gradlinig begrenzten Fläche; endlich Vergleichung eines Kreisabschnittes und eines Kreisabschnittes mit der Kreisfläche oder einer gradlinig begrenzten Fläche.

Die erste Aufgabe, die der Vergleichung eines Kreisbogens mit einem andern Kreisbogen, insbesondere mit der Peripherie ist schon in §. 66. auf die Winkelmessung zurückgeführt. Die halbe Kreislinie entspricht dem flachen Winkel, der Quadrant dem rechten Winkel; die Namen Grad, Minute, Sekunde gelten gleichmäßig für Bogen wie für Winkel.

Die zweite Aufgabe, die der Messung irgend eines Kreisbogens nach einer gegebenen Längeneinheit wird demnach vollständig gelöst sein, sobald die Kreislinie nach irgend einer Längeneinheit gemessen ist. Als angemessenste Längeneinheit bietet sich der Radius dar, weil durch ihn der Kreis vollständig bestimmt ist. Diese Aufgabe wird folgendermaßen gelöst:

Es wird zunächst (§. 80) gezeigt, daß die Kreislinie länger ist, als der Umfang jedes eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks und kürzer als der Umfang jedes umschriebenen regelmäßigen Vielecks: daß also das Verhältniß einer Kreislinie zu ihrem Radius immer größer ist, als das Verhältniß des Umfangs irgend eines regelmäßigen Vielecks zum Radius des umschriebenen Kreises, und kleiner als das Verhältniß des Umfangs irgend eines regelmäßigen Vielecks zum Radius des eingeschriebenen Kreises. Kann man also für irgend ein regelmäßiges Vieleck diese beiden Verhältnisse finden, so sind damit 2 Grenzen gefunden, zwischen welchen die gesuchte Maaßzahl liegt. Dies ist aber leicht, indem das Verhältniß des Umfangs eines regelmäßigen Vierecks, Sechsecks, Zehnecks zum Radius des umschriebenen Kreises leicht gefunden wird (§. 81) und aus diesem Verhältniß auf das Verhältniß des Umfangs eines regelmäßigen Vielecks von gleicher Seitenzahl zum Radius des eingeschriebenen Kreises geschlossen werden kann (§. 82). — Lassen sich nun diese Grenzen einander nähern, und zwar so, daß der Grad dieser Näherung unbegrenzt ist, so wird die gesuchte Maaßzahl näherungsweise gefunden sein, und zwar so, daß der Grad dieser Näherung unbegrenzt ist. Die Grenzen lassen sich aber dadurch einander unendlich nahe bringen, daß man aus dem Verhältniß des Umfangs irgend eines regelmäßigen Vielecks zum Radius des umschriebenen Kreises auf das entsprechende Verhältniß in einem Vielecke von doppelter Seitenzahl schließen kann (§. 84). Damit ist die zweite Aufgabe gelöst.

Die anderweitigen Aufgaben werden dadurch auf die vorige und auf die Dreiecksmessung zurückgeführt, daß jeder Kreis sich als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten läßt.

§. 80. Jeder Kreisbogen, welcher kleiner als die halbe Kreislinie ist, ist größer als die zugehörige Sehne und kleiner als die zugehörige Tangente.

Unter der zu einem Bogen gehörigen Tangente wird hier ein Stück der der zugehörigen Sehne parallelen Tangente verstanden, welches von den Verlängerungen der nach den beiden Endpunkten des Bogens gezogenen Radien begrenzt wird.

Daß der Bogen größer ist, als die zugehörige Sehne, folgt daraus, daß die grade Linie die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist.

Daß der Bogen kleiner ist, als die zugehörige Tangente, wenn der Bogen kleiner als die halbe Kreislinie ist, folgt daraus, daß der Kreis sich als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten läßt. Denkt man sich nämlich ein regelmäßiges Vieleck von $2n$ oder mehr Seiten, nimmt daraus eine ungrade Zahl auf einander folgender Seiten, die nicht größer ist als n , verbindet die Mitten der äußersten Seiten mit dem Mittelpunkte des ein- oder umschriebenen Kreises, verlängert die mittlere der Seiten bis zum Durchschnitte mit den Verlängerungen jener Radien, so ergiebt sich sogleich, daß diese Linie größer ist, als das zwischen den Radien liegende Stück des Umfangs. Dieser Schluß ist richtig, wie groß auch n sein mag, also auch, wenn n über jede Grenze hinaus wächst, d. h. wenn das Vieleck in einen Kreis, die Summe der betrachtenden Seiten in einen Bogen kleiner als der Halbkreis, und die verlängerte mittlere Seite in die zugehörige Tangente übergeht.

Folgerung. Die Kreislinie ist länger als der Umfang eines eingeschriebenen und kürzer als der Umfang eines umschriebenen regelmäßigen Vielecks.

§. 81. Bezeichnet man die Seiten eines regelmäßigen n -Ecks mit a_n , den Umfang mit u_n , den Radius des umschriebenen Kreises mit r , den Radius des eingeschriebenen Kreises mit ρ , so ist

$$1. \frac{a_4}{r} = \sqrt{2}$$

Denn verbindet man den Mittelpunkt mit den Eckpunkten des Quadrates, so ist jede Seite desselben Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkel an der Spitze $= 90^\circ$ ist, und dessen beide Katheten $= r$ sind. Hieraus folgt

$$\frac{u_4}{r} = 4 \sqrt{2}$$

$$2. \frac{a_6}{r} = 1$$

Denn verbindet man den Mittelpunkt mit den Eckpunkten des Sechsecks, so ist jede Seite desselben Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkel an der Spitze $= 60^\circ$ ist, so daß das Dreieck gleichseitig, die Grundlinie gleich jeder der beiden andern Seiten $= r$ ist. Hieraus folgt:

$$\frac{u_6}{r} = 6$$

$$3. \frac{a_{10}}{r} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Denn verbindet man den Mittelpunkt mit den Eckpunkten de

Zehneck, so ist jede Seite desselben Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkel an der Spitze $= 36^\circ$ ist, so daß jeder der Winkel an der Grundlinie $= 72^\circ$ d. h. doppelt so groß ist. Halbirt man einen dieser Winkel, so zerfällt das gleichschenklige Dreieck in 2 gleichschenklige, in deren einem der Winkel an der Spitze $= 36^\circ$ ist, während er im andern $= 108^\circ$ ist; in diesen beiden gleichschenkligen Dreiecken ist jede der gleichen Seiten $= a_{10}$. Das erstere derselben ist dem ursprünglichen ähnlich; daraus ergibt sich

$$(r - a_{10}) : a_{10} = a_{10} : r$$

$$r^2 - a_{10} r = a_{10}^2$$

$$\left(\frac{a_{10}}{r}\right)^2 + \frac{a_{10}}{r} = 1$$

$$\frac{a_{10}}{r} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

da nur der positive Wurzelwerth in Betracht kommen kann. Hieraus folgt:

$$\frac{a_{10}}{r} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Anm. Auf 3 beruht die Construction eines regelmäßigen Zehnecks, eines regelmäßigen Fünfecks, und, in Verbindung mit 2., eines regelmäßigen Fünfzehnecks.

§. 82. Bezeichnet man die Sehne eines Kreises mit s , die zu demselben Bogen (dem kleineren) gehörige Tangente mit t , den Radius des Kreises mit r , so verhält sich

$$t : s = r : \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} = 1 : \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{s^2}{r^2}}$$

denn t und s sind die Grundlinien zweier ähnlichen gleichschenkligen Dreiecke, deren Höhen r und $\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$ sind.

Daraus folgt:

$$\frac{a_n}{\rho} : \frac{a_n}{r} = 1 : \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{r}\right)^2}$$

$$\frac{a_n}{\rho} = \frac{\frac{a_n}{r}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{r}\right)^2}}$$

Demnach:

$$1. \quad \frac{a_4}{\rho} = \frac{\frac{a_4}{r}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a_4}{r}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}} = 2$$

ein Resultat, welches sich auch leicht auf anderem Wege finden läßt. Hieraus folgt:

$$\frac{u_4}{\rho} = 8$$

$$2. \frac{a_6}{\rho} = \frac{\frac{a_6}{r}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a_6}{r} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$$

Folglich: $\frac{u_6}{\rho} = 4 \sqrt{3}$

$$3. \frac{a_{10}}{\rho} = \frac{\frac{a_{10}}{r}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a_{10}}{r} \right)^2}} = \frac{\left(\frac{a_{10}}{r} \right) \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2}}$$

$$= \frac{2(5 - 2\sqrt{5}) \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{5}$$

Folglich $\frac{u_{10}}{r} = 4(5 - 2\sqrt{5}) \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$

§. 83. Bezeichnet man die Peripherie mit P, den Radius mit R, so liegt

1. $\frac{P}{R}$ zwischen den Grenzen

$$4\sqrt{2} \text{ und } 8 \quad (\S. 81. 1 \text{ und } \S. 82. 1)$$

d. h. 5,656854 und 8

oder $\frac{P}{2R}$ liegt zwischen den Grenzen

$$2,828427 \text{ und } 4$$

2. $\frac{P}{R}$ liegt auch zwischen den engeren Grenzen

$$6 \text{ und } 4\sqrt{3} \quad (\S. 81. 2 \text{ und } \S. 82. 2)$$

d. h. 6 und 6,928203

oder $\frac{P}{2R}$ liegt zwischen den Grenzen

$$3 \text{ und } 3,464102$$

3. $\frac{P}{R}$ liegt auch zwischen den engeren Grenzen

$$5(-1 + \sqrt{5}) \text{ und } 4(5 - 2\sqrt{5}) \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$(\S. 81. 3 \text{ und } \S. 82. 3)$$

d. h. 6,18034 und 6,49840

oder $\frac{P}{2R}$ liegt zwischen den Grenzen

3,09017 und 3,24920

§. 84. Aus §. 48. 1 ergibt sich, daß

$$a_{2n}^2 = 2r \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a_n^2} \right)$$

mithin:

$$\frac{a_{2n}}{r} = \sqrt{2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a_n}{r} \right)^2} \right\}}$$

Hieraus folgt, daß man aus dem Verhältnisse des Umfangs eines regelmäßigen n -Ecks zum Radius des umschriebenen Kreises auf das entsprechende Verhältniß für ein regelmäßiges $2n$ -Eck schließen kann; so also kann man z. B. vom regelmäßigen Sechseck zum Zwölfeck, zum Vierundzwanzigeck u. s. w. bis ins Unendliche fortschreiten; für jedes dieser n -Ecke kann man nach §. 82 das Verhältniß $\frac{a_n}{\rho}$ ableiten und so das Verhältniß $\frac{P}{2R}$ in beliebig enge Grenzen einschließen.

So ergibt sich

$$\frac{a_{12}}{r} = 0,517638 \dots \quad \frac{a_{12}}{\rho} = 0,535898 \dots$$

folglich liegt $\frac{P}{2R}$ zwischen den Grenzen

3,105828 und 3,215390

$$\frac{a_{24}}{r} = 0,261052 \dots \quad \frac{a_{24}}{\rho} = 0,263305 \dots$$

folglich liegt $\frac{P}{2R}$ zwischen den Grenzen

3,132682 und 3,159660

$$\frac{a_{48}}{r} = 0,130806 \dots \quad \frac{a_{48}}{\rho} = 0,131087 \dots$$

folglich liegt $\frac{P}{2R}$ zwischen den Grenzen

3,139350 und 3,159660

$$\frac{a_{96}}{r} = 0,065438 \dots \quad \frac{a_{96}}{\rho} = 0,065473 \dots$$

folglich liegt $\frac{P}{2R}$ zwischen den Grenzen

3,141032 und 3,142715

§. 85. Auf solchem Wege läßt sich das konstante d. h. für alle Kreise gleiche Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser oder der

halben Peripherie zum Radius mit beliebiger Näherung berechnen; leichter und besser auf andern Wegen, deren Erklärung jedoch hier nicht möglich ist. Genau läßt sich diese Verhältnißzahl nicht angeben, da sie irrational *) ist. Der Abkürzung wegen bezeichnet man dieses Verhältniß mit π . Diese Zahl ist auf 200 Bruchstellen berechnet; auf 140 Bruchstellen findet sie sich in Vega's Sammlung mathematischer Tafeln; auf 32 Bruchstellen ist sie zuerst von Ludolf von Ceulen berechnet, und heißt nach ihm die Ludolfische Zahl; auf 7 Bruchstellen heißt sie

$$3, 1415926$$

Für viele Rechnungen ist der Archimedische Näherungswert $\frac{22}{7}$ oder der genauere von Metius gefundene $\frac{355}{113}$ vollkommen genügend.

Da die Zahl π die Maaßzahl des Halbkreises für den Radius als Einheit ist, und da der Halbkreis einem flachen Winkel entspricht, so gebraucht man sehr häufig π als Zeichen für einen flachen Winkel.

§. 86. Aus §. 85 ergibt sich als Maaßzahl P für die Peripherie eines Kreises, wenn dieselbe nach irgend einer beliebigen Längeneinheit gemessen wird

$$P = 2 R \pi$$

wenn R die Maaßzahl des Radius für dieselbe Längeneinheit bezeichnet.

§. 87. Längenmessung eines Kreisbogens. Die Maaßzahl b eines Kreisbogens von β Graden, dessen Radius die Maaßzahl R hat, ist gegeben durch die Gleichung:

$$b = \frac{\beta}{180} R \pi$$

Denn $\frac{\beta}{180}$ ist das Verhältniß des Bogens zum Halbkreise, und $R\pi$ ist die Maaßzahl des Halbkreises.

§. 88. Messung der Kreisfläche. Die Maaßzahl K einer Kreisfläche, deren Radius die Maaßzahl R hat, ist gegeben durch die Gleichung

$$K = R^2 \pi$$

Denn die Kreisfläche ist gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie der Umfang, und dessen Höhe der Radius des Kreises ist.

§. 89. Messung eines Kreisabschnittes. Die Maaßzahl A eines Abschnittes, dessen Standbogen β Grade hat, und dessen Radius die Maaßzahl R hat, ist gegeben durch die Gleichung

$$A = \frac{\beta}{360} R^2 \pi$$

denn der Kreisabschnitt verhält sich zur Kreisfläche, wie der Standbogen zur Peripherie.

*) Die Irrationalität beruhe auf Gründen, deren Entwicklung nicht elementar, also hier nicht möglich ist. Ein Beweis derselben (der Lambert'sche) findet sich Legendre, Elements de Geometrie. Note IV.

§. 90. Messung eines Kreisabschnittes. Ein Kreisabschnitt ist vollständig bestimmt durch den zugehörigen Bogen und den Radius; er ist gleich der Summe oder Differenz des zugehörigen Kreisabschnittes, welcher nach §. 89. gemessen werden kann, und eines Dreiecks, in welchem 2 Seiten gleich dem Radius sind, und die zu einer von beiden gehörige Höhe durch ihre Abhängigkeit vom Bogen und Radius vollständig bestimmt ist; die Berechnung der Höhe durch diese Abhängigkeit ist aber eine Aufgabe der Trigonometrie. In jedem vorliegenden Kreisabschnitte läßt sich diese Berechnung durch unmittelbare Ausmessung der Höhe ersetzen.

2. Die Stereometrie.

Die Aufgabe der Geometrie ist die Bestimmung der Größe der räumlichen Körper. Die Planimetrie befaßt sich mit der Bestimmung der Größe der ebenen Figuren, welche einer Ebene eingeschrieben sind. Die Stereometrie befaßt sich mit der Bestimmung der Größe der räumlichen Körper, welche einer Ebene eingeschrieben sind. Die Stereometrie befaßt sich mit der Bestimmung der Größe der räumlichen Körper, welche einer Ebene eingeschrieben sind. Die Stereometrie befaßt sich mit der Bestimmung der Größe der räumlichen Körper, welche einer Ebene eingeschrieben sind.

Erster Abschnitt.

Von den unvollständig begrenzten räumlichen Gebilden.

Erstes Capitel.

Von der Lage der Punkte, geraden Linien und Ebenen im Raume.

§. 1. Allgemeine Uebersicht.

1. Durch 1 Punkt im Raume sind unendlich viele gerade Linien, unendlich viele Ebenen möglich. Durch 2 Punkte im Raume ist eine gerade Linie vollständig bestimmt, durch dieselben sind unendlich viele Ebenen möglich. Durch 3 Punkte im Raume, welche nicht in 1 geraden Linie liegen, ist eine Ebene vollständig bestimmt.

2. Durch 1 Punkt im Raume sind unendlich viele grade Linien möglich; durch 1 grade Linie und 1 Punkt außerhalb derselben ist eine Ebene vollständig bestimmt. Zwei grade Linien im Raume können gegen einander 3 verschiedene Verhältnisse haben; sie haben entweder 2 Punkte mit einander gemein, dann haben sie alle Geraden, die durch diese 2 Punkte gehen, gemein; oder sie haben 1 Punkt mit einander gemein, welcher in endlich vieler unendlich vieler Geraden liegt, so daß die Linien nicht parallel sind; oder sie haben keine Punkte mit einander gemein, dann gehören sie nicht derselben Ebene an; sie heißen fremde oder schiefe Linien. Zwei schiefe Geraden können nicht in einem Punkte sich schneiden, weil sie nicht in einer Ebene liegen; sie sind aber in einem Punkte sich schneiden, wenn man sie verlängert.

2. Die Stereometrie.

Die Aufgabe der Geometrie ist die Erkenntniß der Gesetze der räumlichen Formen. Die Planimetrie beschränkt sich auf diejenigen räumlichen Gebilde, welche einer Ebene angehören; die Stereometrie hebt diese Schranke auf. Indem sie die Planimetrie voraussetzt, beschäftigt sie sich nur mit solchen räumlichen Gebilden, welche nicht einer Ebene angehören. Wie die elementare Planimetrie sich nur mit der graden Linie und dem Kreise und den von ihnen begrenzten Figuren beschäftigt, so befaßt sich die elementare Stereometrie nur mit diesen Linien, mit den aus ihnen durch gradlinige oder kreisförmige Bewegung erzeugten Flächen, und den von solchen Flächen begrenzten räumlichen Gebilden.

Erster Abschnitt.

Von den unvollständig begrenzten räumlichen Gebilden.

Erstes Capitel.

Von der Lage der Punkte, graden Linien und Ebenen im Raume.

§. 1. Allgemeine Uebersicht.

1. Durch 1 Punkt im Raume sind unendlich viele grade Linien, unendlich viele Ebenen möglich. Durch 2 Punkte im Raume ist eine grade Linie vollständig bestimmt; durch dieselben sind unendlich viele Ebenen möglich. Durch 3 Punkte im Raume, welche nicht in 1 graden Linie liegen, ist eine Ebene vollständig bestimmt.

2. Durch 1 grade Linie im Raume sind unendlich viele Ebenen möglich; durch 1 grade Linie und 1 Punkt außerhalb derselben ist eine Ebene vollständig bestimmt.

Zwei grade Linien im Raume können gegen einander 3 wesentlich verschiedene Lagen haben; sie haben entweder 2 Punkte mit einander gemein, dann haben sie alle gemein, sie sind dieselbe grade Linie; oder sie haben 1 Punkt mit einander gemein, welcher in endlicher oder unendlicher Entfernung liegen kann, so daß die Linien geneigt oder parallel sind; dann bestimmen sie eine Ebene, welcher sie beide angehören; oder sie haben keinen Punkt mit einander gemein; dann gehören sie nicht derselben Ebene an; sie heißen kreuzende Linien.

Zwei solche kreuzende Linien bilden ein eigentlich stereometrisches Gebilde, welches näher zu betrachten ist. Man spricht insbesondre von einem Winkel der beiden Linien; er ist identisch mit demjenigen, welchen man erhält, wenn man die eine Linie parallel mit sich selbst verschiebt, bis sie die andre schneidet; ferner von der Entfernung der beiden Linien von einander; man versteht darunter die kürzeste aller Verbindungslinien, welche zwischen den beiden Linien gezogen werden können.

3. Eine Ebene und ein Punkt können 2 verschiedene Lagen gegen einander haben; der Punkt kann in der Ebene liegen oder außerhalb derselben. Im 2ten Falle spricht man von der Entfernung des Punktes von der Ebene, und versteht darunter die kürzeste aller Verbindungslinien zwischen dem Punkte und der Ebene.

Eine Ebene und eine grade Linie können zwei wesentlich verschiedene Lagen gegen einander haben; sie haben entweder 2 Punkte gemein oder 1. Im 1ten Falle liegt die Linie in der Ebene. Im 2ten Falle liegt der gemeinsame Punkt entweder in endlicher oder in unendlicher Entfernung; demnach heißt die Linie gegen die Ebene entweder geneigt oder parallel. Eine Linie, bildet mit den Linien einer Ebene unendlich viele Winkel; es giebt unter ihnen einen kleinsten und einen größten, welche Nebenwinkel von einander sind. Der kleinste dient als Maaß des Winkels der Linie gegen die Ebene. Ist der kleinste und somit auch der größte, folglich jeder Winkel ein rechter, so nennt man die Linie auf der Ebene senkrecht. Die Natur bietet ein Beispiel einer Linie, die auf allen Linien einer Ebene senkrecht steht, in der Richtung eines frei hängenden beschwerten Fadens gegen eine Wasserfläche.

Zwei Ebenen können 2 wesentlich verschiedene Lagen gegen einander haben; sie haben entweder 2 oder 1 grade Linie gemein. Im ersten Falle sind sie dieselbe Ebene. Im zweiten Falle liegt die gemeinsame Linie in endlicher oder in unendlicher Entfernung; danach sind die Ebenen entweder geneigt und durchschneiden einander, oder parallel. — Wenn die beiden Ebenen geneigt sind, so nennt man das Maaß der Drehung, welche nöthig ist, um die eine Ebene in die andre zu legen, den Winkel der beiden Ebenen. Zwei parallele Ebenen werden von jeder nicht parallelen Ebene in 2 parallelen graden Linien geschnitten.

§. 2. Hauptsatz.

Eine grade Linie steht auf einer Ebene senkrecht

wenn sie auf 2 gegen einander geneigten Linien der Ebene senkrecht steht.

Der Satz wird bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß, wenn eine Linie auf 2 durch ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene in der Ebene gezogenen Linien senkrecht steht, sie auf einer beliebigen dritten durch diesen Durchschnittspunkt in der Ebene gezogenen Linie senkrecht steht.

Die Bedingung, daß eine Linie auf einer andern Linie senkrecht steht, ist gleichbedeutend mit der, daß jeder Punkt der einen Linie von irgend 2 festen Punkten der andern Linie gleich weit entfernt ist; diese beiden Punkte sind gleichweit vom Durchschnittspunkt der Linien entfernt.

Ist demnach eine Linie A, welche eine Ebene im Punkt o schneidet, auf 2 Linien B und C der Ebene senkrecht, so heißt das nichts Andres, als: Irgend ein Punkt α der Linie A ist von 2 Punkten β und β' der Linie B, die gleichweit von o entfernt sind, gleich weit entfernt; und derselbe Punkt α ist von 2 Punkten γ und γ' der Linie C, die ebenfalls gleich weit von o entfernt sind, gleich weit entfernt. Zieht man $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$, so schneiden diese Linien irgend eine 3te durch den Punkt o in die Ebene gezogene Linie D in 2 Punkten δ und δ' , welche auch gleich weit von o entfernt sind, und es ist demnach nur zu zeigen daß α gleich weit von δ und δ' entfernt ist. Dies ergibt sich aber leicht daraus, daß die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha\beta'\gamma'$ kongruent sind, daß in diesen Dreiecken die Punkte δ und δ' entsprechende Punkte sind, daß also $\alpha\delta = \alpha\delta'$.

§. 3. Folgerungen.

1. Wenn man in einem Punkte einer graden Linie im Raume auf derselben beliebig viele Perpendikel errichtet, so liegen diese alle in einer Ebene. Oder: Wenn man einen rechten Winkel um einen seiner Schenkel dreht, so erzeugt der andre durch diese Drehung eine Ebene, welche auf dem ersten Schenkel senkrecht steht.

2. Durch 1 grade Linie und 1 Punkt in oder außerhalb ist eine gegen die Linie senkrechte Ebene vollständig bestimmt. Konstruktion derselben.

3. Durch 1 Ebene und ein Punkt in oder außerhalb derselben ist eine gegen die Ebene senkrechte Linie vollständig bestimmt. — Wenn der Punkt in der Ebene liegt, so läßt sich das Perpendikel leicht konstruiren; wenn der Punkt außerhalb der Ebene liegt, ist die Konstruktion hier nicht leicht abzuleiten; (§. 4. 1. Anm.) doch läßt sich der Satz dann indirekt nachweisen.

4. Wenn man eine Ebene, welche auf einer gegebenen graden Linie senkrecht steht, parallel mit sich selbst verschiebt, so bleibt dieselbe gegen die Linie senkrecht. — Oder: Wenn von 2 parallelen Ebenen eine auf einer gegebenen graden Linie senkrecht steht, so steht auch die andre auf ihr senkrecht. — Oder: Wenn eine grade Linie auf einer von 2 parallelen Ebenen senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Umkehrung. Zwei Ebenen, welche auf derselben graden Linie senkrecht stehen, sind parallel.

5. Wenn man eine grade Linie, welche auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht, parallel mit sich selbst verschiebt, so bleibt sie gegen die Ebene senkrecht. — Oder: Wenn von 2 parallelen graden Linien eine auf einer gegebenen Ebene senkrecht steht, so steht auch die andre auf ihr senkrecht. — Oder: Wenn eine Ebene auf einer von 2 parallelen graden Linien senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Umkehrung. Zwei grade Linien, welche auf derselben Ebene senkrecht stehen, sind parallel.

§. 4. Weitere Folgerungen.

1. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene lassen sich unzählig viele grade Linien nach der Ebene ziehen. Die kleinste von allen ist das Perpendikel; dasselbe dient als Maaß der Entfernung des Punktes von der Ebene. Jede andre ist um so größer, je weiter ihr Fußpunkt vom Fußpunkte des Perpendikels entfernt ist, oder je größer der Winkel ist, welchen sie mit dem Perpendikel bildet; alle diejenigen sind einander gleich, deren Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkte des Perpendikels entfernt sind, oder welche gleiche Winkel mit dem Perpendikel bilden. Alle Punkte einer Ebene gruppieren sich also rücksichtlich ihrer Entfernung von irgend einem Punkte des Raumes in lauter concentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Fußpunkt des von dem Punkte auf die Ebene gefällten Perpendikels ist.

Anm. Hierauf beruht eine leichte Auflösung der Aufgabe: Von einem Punkte außerhalb einer Ebene ein Perpendikel auf dieselbe zu fällen.

2. Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von allen Punkten der Peripherie eines Kreises gleich weit entfernt ist, ist eine grade Linie, welche auf der Ebene des Kreises in seinem Mittelpunkte senkrecht steht.

3. Jeder beliebige Punkt des Raumes hat von den Punkten der Peripherie unendlich viele verschiedene Entfernungen, wenn er nicht dem Perpendikel im Mittelpunkte angehört. Es giebt unter diesen Entfernungen eine größte und eine kleinste, welche den Endpunkten desselben Durchmessers entsprechen, und zwar desjenigen Durchmessers, welcher durch den Fußpunkt des von dem gegebenen Punkte auf die Ebene gefällten Perpendikels gezogen werden kann. Die andern Entfernungen sind paarweise einander gleich, und zwar sind diejenigen einander gleich, deren Fußpunkte gleiche Bogen, vom Endpunkte des kleineren Durchmesserstücks aus gerechnet abschneiden. (Plan. §. 71. A.)

§. 5. Winkel einer graden Linie und einer Ebene.

Eine grade Linie, welche eine Ebene schneidet, und nicht auf ihr senkrecht steht, bildet mit den durch den Durchschnittspunkt in der Ebene gegebenen graden Linien unendlich viele verschiedene Winkel. Um sich über dieselben zu orientiren, beschreibe man in der Ebene um den Durchschnittspunkt als Mittelpunkt mit beliebigem Radius einen Kreis, wähle in der gegebenen Linie irgend einen Punkt außerhalb der Ebene, und denke sich ihn mit allen Punkten der Peripherie des

Kreises verbunden; so erhält man unendlich viele Dreiecke, begrenzt von dem in der gegebenen Linie abgegrenzten Stücke, von dem Radius des Kreises, und von den Entfernungen des in der gegebenen Linie gewählten Punktes von den Punkten der Peripherie. Alle diese Dreiecke stimmen in 2 Seiten überein, in der 3ten nicht. Nach §. 4. 3 und Plan. §. 25. 2. hat man daher folgende Bestimmungen:

Unter allen Winkeln, welche eine grade Linie mit den Linien einer Ebene bildet, ist derjenige der kleinste, welchen man erhält, wenn man von einem Punkte der gegebenen Linie ein Perpendikel auf die Ebene fällt, und den Durchschnittspunkt von Linie und Ebene mit dem Fußpunkte dieses Perpendikels verbindet. — Alle übrigen Winkel sind paarweise gleich, und zwar sind diejenigen einander gleich, deren in der Ebene liegende Schenkel mit dem in der Ebene liegenden Schenkel des kleinsten Winkels gleiche Winkel bilden. — Die gegebene Linie steht auf einer Linie der Ebene senkrecht, und zwar auf derjenigen, welche auf dem in der Ebene liegenden Schenkel des kleinsten Winkels senkrecht steht. — Den kleinsten Winkel nennt man kurz: den Winkel der Ebene und der Linie.

§. 6. Folgerungen.

1. Parallele Ebenen bilden mit derselben graden Linie gleiche Winkel.

2. Parallele grade Linien bilden mit derselben Ebene gleiche Winkel.

3. Wenn man eine Linie und eine Ebene parallel mit sich selbst verschiebt, so bleibt ihr Winkel ungeändert.

4. Wenn eine Linie einer Ebene parallel ist, so ist ihr Winkel $= 0$; eine Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie einer Linie derselben parallel ist.

5. Parallele Linien zwischen einer Linie und einer ihr parallelen Ebene sind gleich. Insbesondere also sind Perpendikel zwischen einer graden Linie und einer ihr parallelen Ebene gleich. — Man nennt ein Perpendikel von einem Punkte einer Linie auf eine ihr parallele Ebene: die Entfernung der Linie von der Ebene.

6. Zwei Punkte, welche gleich weit von einer Ebene entfernt sind, und auf derselben Seite der Ebene liegen, bestimmen eine grade Linie, welche der Ebene parallel ist. — Durch einen Punkt giebt es unendlich viele grade Linien, welche der Ebene parallel sind.

§. 7. Winkel zweier Ebenen. Erklärung s. §. 1. c.

Errichtet man in den beiden Ebenen auf der Durchschnittslinie in demselben willkürlich gewählten Punkte Perpendikel, so ist der Winkel dieser Linien derselbe, wie der Winkel der Ebenen; denn beide messen dieselbe Drehung. Die Ebene dieses Winkels steht auf der Durchschnittslinie senkrecht.

§. 8. Folgerungen.

a. Für senkrechte Ebenen.

1. Wenn eine Ebene eine Linie enthält, welche auf einer andern Ebene senkrecht steht, so stehen die Ebenen auf einander senkrecht.

2. Wenn in einem Punkte der Durchschnittslinie zweier auf einander senkrechten Ebenen auf der einen Ebene ein Perpendikel errichtet wird, so liegt dieses in der andern Ebene.

3. Wenn in einer von 2 auf einander senkrechten Ebenen auf der Durchschnittslinie ein Perpendikel errichtet wird, so steht dieses auf der andern Ebene senkrecht.

4. Durch einen innerhalb oder außerhalb einer Ebene liegenden Punkt sind unendlich viele auf der Ebene senkrechte Ebenen möglich, welche sämmtlich eine grade Linie gemein haben, die auf der gegebenen Ebene senkrecht steht.

5. Durch eine innerhalb oder außerhalb derselben liegende grade Linie ist eine auf der Ebene senkrechte, die gegebene Linie enthaltende Ebene vollkommen bestimmt. (Die Ebene des Winkels einer graden Linie mit einer Ebene ist auf dieser Ebene senkrecht).

b. Für parallele Ebenen.

1. Parallele grade Linien zwischen parallelen Ebenen sind gleich; insbesondere sind die Perpendikel zwischen 2 parallelen Ebenen gleich. — Entfernung paralleler Ebenen.

2. Durch eine Ebene und einen Punkt außerhalb derselben ist eine Ebene vollständig bestimmt, welche der gegebenen Ebene parallel ist. Sie ist der geometrische Ort einer graden Linie, welche durch den gegebenen Punkt geht und der gegebenen Ebene parallel ist.

3. Die Ebene dreier Punkte, welche gleich weit von einer gegebenen Ebene entfernt sind und auf derselben Seite der Ebene liegen, ist der Ebene parallel.

Die Ebene zweier sich schneidenden Linien, welche beide einer gegebenen Ebene parallel sind, ist der gegebenen Ebene parallel.

Die Ebene zweier parallelen Linien, welche einer gegebenen Ebene parallel und gleich weit von ihr entfernt sind und auf derselben Seite der Ebene liegen, ist der gegebenen Ebene parallel.

4. Zwei kreuzende Linien im Raume bestimmen 1 Paar parallele Ebenen; jede derselben ist der geometrische Ort einer graden Linie, welche die eine der beiden graden Linien schneidet und mit der andern parallel ist. Die Entfernung der beiden parallelen Ebenen ist gleich der kürzesten Linie, welche sich zwischen den beiden Linien ziehen läßt. Man erhält diese, wenn man eine auf beiden Ebenen senkrechte Linie parallel mit sich selbst längs der einen Linie vorschiebt, bis sie die andre schneidet. Die so erhaltene Linie ist die einzige, welche, beide Linien verbindend, zugleich auf beiden senkrecht steht. Das zwischen den beiden Linien liegende Stück des gemeinsamen Perpendikels heißt: die Entfernung der beiden Linien.

Die Ebenen zweier Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind parallel.

5. Parallele Ebenen schneiden kreuzende Linien proportional.

c. Für Ebenen überhaupt.

Zwei einander schneidende Ebenen bilden 4 Winkel, welche theils als Scheitwinkel einander gleich, theils als Nebenwinkel supplementär sind. Betrachtet man von den 4 Winkeln nur einen, so gelten folgende Sätze.

1. Errichtet man in irgend einem Punkte der Durchschnittslinie beider Ebenen auf beiden Ebenen Perpendikel, und zwar beide nur

nach der Seite hin, nach welcher der Winkel liegt, oder beide nur nach entgegengesetzter Seite hin, so erhält man einen Linienwinkel, dessen Ebene auf der Durchschnittslinie der Ebenen senkrecht steht, und welcher dem Winkel der Ebenen supplementär ist.

2. Errichtet man in irgend einem Punkte der Durchschnittslinie beider Ebenen auf beiden Ebenen Perpendikel, und zwar das eine nach der Seite hin, nach welcher der Winkel liegt, das andre nach der dem Winkel entgegengesetzten Seite, so erhält man wieder einen Linienwinkel, dessen Ebene auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen senkrecht steht, welcher aber dem Winkel der Ebenen gleich ist.

Antiquæ editiones.

Ein körperliches Leben und physischen Zustand.

Zweites Capitel.

Von körperlichen Ecken und sphärischen Dreiecken.

§. 9. Von körperlichen Winkeln oder Ecken. Drei Ebenen im Raume haben im Allgemeinen 1 Punkt, und je 2 derselben 1 Linie gemein. Wenn die 3 gemeinsamen Linien parallel sind, so liegt der gemeinsame Punkt in unendlicher Entfernung. Wenn 1 von diesen 3 gemeinsamen Linien in unendlicher Entfernung liegt, d. h. wenn 2 der 3 Ebenen parallel sind, so sind die beiden andern gemeinsamen Linien auch parallel, und der gemeinsame Punkt liegt in unendlicher Entfernung. Wenn alle 3 gemeinsamen Linien in unendlicher Entfernung liegen, so sind alle 3 Ebenen parallel, und haben dann unendlich viele unendlich entfernte Punkte gemein.

Wenn keiner dieser Grenzfälle stattfindet, wenn auch nicht die 3 Ebenen eine Linie gemein haben, so zerlegen sie den unendlichen Raum in 8 unvollständig begrenzte Räume, deren jeder ein dreiseitiger Körperwinkel oder eine dreiseitige körperliche Ecke genannt wird. Der gemeinsame Punkt heißt Spitze, die Durchschnittslinien heißen Kanten. Die Winkel, welche in den Ebenen liegend von den Kanten gebildet werden, heißen Kantenwinkel. Die Winkel, welche an den Kanten liegend von den Ebenen gebildet werden, heißen Flächenwinkel. — Wenn durch die Spitze noch mehr Ebenen gelegt werden, so bilden diese mit jenen mehrseitige Ecken oder mehrseitige Körperwinkel. — Wie ein Linienwinkel im innigsten Zusammenhange steht mit dem entsprechenden Bogen eines Kreises, in dessen Mittelpunkt die Winkelspitze liegt, so steht ein Körperwinkel im engsten Zusammenhange mit dem entsprechenden Flächenstück einer Kugel, in deren Mittelpunkt die Winkelspitze liegt. Wie dort das Verhältniß des Bogens zur Kreislinie das Maafß des Winkels ist, so ist hier das Verhältniß des Oberflächenstücks der Kugel zur Kugelfläche das Maafß des Körperwinkels. Während dies dort die einzige wesentliche Beziehung ist, ist der Zusammenhang hier ein viel mannigfaltigerer, zu dessen Erörterung es einer Betrachtung der Fundamenteigenschaften der Kugel bedarf.

§. 10. Fundamentalsätze über die Kugel und das sphärische Dreieck.

1. Die Kugel ist der geometrische Ort eines Punktes im Raume, welcher von einem gegebenen Punkte eine gegebene Entfernung hat. Diese konstante Entfernung heißt Radius; der feste Punkt Mittelpunkt.

2. Jede Ebene, deren Entfernung vom Mittelpunkt kleiner als der Radius ist, schneidet die Kugel in einem Kreise (§. 4. 1.), dessen Mittelpunkt im Fußpunkte des vom Mittelpunkte der Kugel auf die schneidende Ebene gefällten Perpendikels liegt. Umgekehrt: Errichtet man im Mittelpunkte des Kreises auf der Ebene desselben ein Perpendikel, so trifft dieses den Mittelpunkt der Kugel. Und: Verbindet man den Mittelpunkt der Kugel mit dem Mittelpunkt des Kreises durch eine grade Linie, so steht diese auf der Ebene des Kreises senkrecht. — Der Kreis ist um so kleiner, je größer seine Entfernung vom Mittelpunkte ist; und umgekehrt.

3. Wenn die Ebene des Kreises den Mittelpunkt der Kugel enthält, so heißt der Kreis ein Hauptkreis. Sein Radius ist gleich dem Radius der Kugel, und sein Mittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammen. Alle Hauptkreise derselben Kugel sind gleich. — Wenn die Ebene des Kreises den Mittelpunkt der Kugel nicht enthält, so heißt er ein Nebenkreis.

Durch 2 Punkte auf der Oberfläche der Kugel, die nicht diametral entgegengesetzt sind, ist ein Hauptkreis vollständig bestimmt. Die beiden Punkte theilen den Hauptkreis in 2 ungleiche Bogen; der kleinere derselben ist die kleinste aller Verbindungslinien, welche sich auf der Oberfläche der Kugel zwischen den beiden Punkten ziehen läßt. Denn jede Bewegung eines Punktes von einem festen Punkte der Oberfläche einer Kugel bis zu einem zweiten über die Oberfläche hin läßt sich zurückführen auf die Drehung einer graden Linie um ihren einen Endpunkt aus einer gegebenen Lage in eine zweite, indem dann jeder Punkt dieser Linie sich auf der Oberfläche einer Kugel bewegt. Diese Drehung kann auf unendlich vielen Wegen ausgeführt werden, deren kürzester der ebene ist, und durch den hohlen Winkel der beiden Grenzlagen bestimmt wird. Der entsprechende Weg des Punktes, d. h. der Weg in dem kleineren Bogen des Hauptkreises ist demnach auch für diesen der kürzeste. Diesen kleineren Hauptkreisbogen zwischen 2 Punkten auf der Oberfläche der Kugel nennt man: die sphärische Entfernung der beiden Punkte. Sie vertritt in vielen Beziehungen bei sphärischen Figuren die Stelle der graden Linie bei ebenen. (Unter allen ebenen Verbindungslinien der Punkte auf der Oberfläche der Kugel ist der größere Bogen des Hauptkreises die längste.)

4. Eine Kugel kann insbesondere durch die Drehung eines Halbkreises um seinen Grenzdurchmesser erzeugt werden. Von dieser Vorstellung ausgehend nennt man den Grenzdurchmesser, welcher Durchmesser der Kugel wird, Arc derselben, und seine beiden Endpunkte Pole. Jeder Punkt des Halbkreises beschreibt einen Kugelfreis, dessen Ebene auf der Arc senkrecht steht; derjenige Punkt der Halbkreislinie,

welcher diese halbiert, beschreibt einen Hauptkreis, den Aequator; alle übrigen beschreiben Nebenkreise, Parallelkreise.

Jeder Durchmesser der Kugel läßt sich als Arc, jede 2 diametral entgegengesetzten Punkte als Pole, jeder Hauptkreis als Aequator denken.

Jeder Pol hat von allen Punkten desselben Parallelkreises gleiche direkte und gleiche sphärische Entfernungen. Der Aequator ist der geometrische Ort eines Punktes der Kugeloberfläche, welcher von den beiden Polen gleich weit entfernt ist, sowohl in direkter als in sphärischer Entfernung.

5. Wenn man die Entfernung der Ebene eines Nebenkreises vom Mittelpunkte wachsen läßt, bis sie gleich dem Radius ist, so reducirt sich der Nebenkreis auf einen Punkt; die Ebene hat dann mit der Kugel nur diesen Punkt gemein; alle andern Punkte der Ebene liegen außerhalb der Kugel. Die Ebene heißt dann Berührungsebene, der Punkt ihr Berührungspunkt. Der Berührungspunkt liegt im Fußpunkte des Perpendikels vom Mittelpunkte der Kugel auf die Berührungsebene. Umgekehrt: Errichtet man im Berührungspunkte ein Perpendikel auf die Berührungsebene, so trifft dasselbe den Mittelpunkt der Kugel. Und: Verbindet man den Mittelpunkt der Kugel mit dem Berührungspunkte, so steht die Verbindungslinie auf der Berührungsebene senkrecht. Oder: Die Berührungsebene ist der geometrische Ort einer graden Linie, welche auf einem Radius in seinem Endpunkte senkrecht steht.

6. Der Winkel zweier Hauptkreise wird ein sphärischer Winkel genannt. Da derselbe gleich dem Winkel der Tangenten der Hauptkreise in einem der beiden Durchschnittspunkte ist, da diese beide auf der Durchschnittslinie der Hauptkreise senkrecht stehen, so ist der sphärische Winkel gleich dem Winkel der beiden Hauptkreisebenen, hat folglich auch den betreffenden Bogen eines jeden zu der Durchschnittslinie als Arc gehörigen Parallelkreises und insbesondere des Aequators zum Maße. — Ein von 2 halben Hauptkreisen eingeschlossener Theil der Kugeloberfläche heißt: sphärisches Zweieck.

7. Drei Punkte der Kugeloberfläche, welche nicht demselben Hauptkreise angehören, bestimmen durch die sie verbindenden Hauptkreisbogen ein sphärisches Dreieck. Die Ebenen der 3 Hauptkreise bestimmen eine entsprechende dreiseitige Ecke am Mittelpunkte der Kugel, mit der Beziehung, daß die Kantenwinkel der Ecke Centriwinkel der Seiten des Dreiecks sind, und daß die Flächenwinkel der Ecke den sphärischen Winkeln des Dreiecks gleich sind. Jedem Eckpunkte des Dreiecks entspricht eine Kante der Ecke, jeder Seite des Dreiecks eine Begrenzungsfläche der Ecke.

Beliebig viele Punkte der Kugeloberfläche in irgend einer bestimmten Reihenfolge genommen, bestimmen durch die sie verbindenden Hauptkreisbogen ein sphärisches Vieleck; und die Ebenen der Hauptkreisbogen bilden am Mittelpunkte eine mehrseitige körperliche Ecke, deren Kantenwinkel Centriwinkel der Vielecksseiten sind, und deren Flächenwinkel den Vieleckswinkeln gleich sind. Jedem Eckpunkte

des Vielecks entspricht eine Kante, jeder Seite des Vielecks eine Grenzfläche der Ecke.

Ein sphärisches Vieleck, dessen Seiten einander gleich sind, und dessen Winkel einander gleich sind, heißt regelmäßig; eine Ecke, deren Kantenwinkel einander gleich sind und deren Flächenwinkel einander gleich sind, heißt regelmäßig.

§. 11. A. Drei Ebenen, welche einen Punkt gemein haben, zerlegen den unendlichen Raum zunächst in 8 unvollständig begrenzte Räume, in 8 dreiseitige Ecken. Rücksichtlich ihrer Lage gegen irgend eine der 8 Ecken zerfallen die 7 übrigen in 3 Gruppen: 1 Gegenecke, 3 Scheitecken und 3 Nebenecken.

Unter Gegenecke einer Ecke versteht man diejenige Ecke, deren Kanten die Rückverlängerungen der Kanten der gegebenen Ecke sind. Zwei Gegenecken haben demnach sowohl die Flächenwinkel als die Kantenwinkel paarweise gleich, und sind aus ihnen in gleicher Ordnung zusammengesetzt. Sie sind aber nicht kongruent, sondern symmetrisch; sie haben gegen jede durch die gemeinsame Spitze gelegte Ebene entgegengesetzte Lage, insbesondere gegen jede ihrer gemeinsamen Grenzflächen; wenn die Gegenecken aus ihrer Lage gebracht werden, ohne verändert zu werden, so bleibt dies Letztere als wesentliches Unterscheidungsmerkmal der Symmetrie von der Congruenz. Das vollkommenste Beispiel von Symmetrie liefert das Spiegelbild eines Körpers.

Unter Scheitecke einer Ecke versteht man diejenige Ecke, welche mit der gegebenen Ecke eine Kante gemein hat, während die beiden andern Kanten derselben die Rückverlängerungen der Kanten der gegebenen Ecke sind. Zwei Scheitecken haben demnach ein Paar Flächenwinkel sowohl wie ein Paar Kantenwinkel (als Scheitelwinkel) gleich; die andern Winkel sind paarweise supplementär (als Nebenwinkel).

Unter Nebenecke einer Ecke versteht man diejenige Ecke, welche mit der gegebenen Ecke 2 Kanten gemein hat, während die 3te Kante derselben die Rückverlängerung der entsprechenden Kante der gegebenen Ecke ist. Zwei Nebenecken haben demnach 1 Paar Flächenwinkel sowohl wie ein Paar Kantenwinkel gemein; die andern Winkel sind paarweise supplementär (als Nebenwinkel).

Bezeichnet man die Kanten einer Ecke mit $\alpha \beta \gamma$, ihre Rückverlängerungen mit $\alpha' \beta' \gamma'$, so hat die Ecke $\alpha\beta\gamma$ die Gegenecke $\alpha'\beta'\gamma'$, die Scheitecken $\alpha\beta\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$, $\alpha\beta'\gamma$; die Nebenecken $\alpha\beta\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$, $\alpha\beta'\gamma$.

B. Drei Hauptkreise zerlegen die Kugelfläche zunächst in 8 sphärische Dreiecke. Rücksichtlich ihrer Lage gegen irgend eins derselben zerfallen die 7 übrigen in 3 Gruppen: 1 Gegendreieck, 3 Scheiteldreiecke, 3 Nebendreiecke.

Unter Gegendreieck eines sphärischen Dreiecks versteht man dasjenige Dreieck, dessen Eckpunkt die Gegenpunkte (d. h. die diametral entgegengesetzten Punkte der Kugelfläche) der Eckpunkte des gegebenen Dreiecks sind. Zwei Gegendreiecke haben demnach sowohl die Winkel wie die Seiten paarweise gleich, und sind aus ihnen in gleicher Ordnung zusammengesetzt; sie sind aber nicht kongruent, sondern symmetrisch; sie haben gegen jeden Hauptkreis entgegengesetzte Lage, insbesondere gegen die 3 Hauptkreise, welche ihre Seiten ent-

halten. Wenn die Gegendreiecke aus ihrer Lage gebracht werden, ohne geändert zu werden, so bleibt dies Letztere als wesentliches Unterscheidungsmerkmal der Symmetrie von der Congruenz bestehen.

Unter Scheiteldreieck eines sphärischen Dreiecks versteht man dasjenige Dreieck, welches mit dem gegebenen Dreieck einen Eckpunkt gemein hat, während die beiden andern Eckpunkte desselben die Gegenpunkte der entsprechenden Eckpunkte des gegebenen Dreiecks sind. Zwei Scheiteldreiecke haben demnach 1 Paar Winkel sowohl als 1 Paar Seiten gleich, die übrigen Winkel sowohl wie Seiten paarweise supplementär.

Unter Nebendreieck eines sphärischen Dreiecks versteht man dasjenige Dreieck, welches mit dem gegebenen Dreieck zwei Eckpunkte gemein hat, während der dritte Eckpunkt desselben der Gegenpunkt des entsprechenden Eckpunktes des gegebenen Dreiecks ist. Zwei Nebendreiecke haben demnach ein Paar Winkel sowohl wie ein Paar Seiten gemein; die andern Winkel und Seiten sind paarweise supplementär.

Bezeichnet man die 3 Eckpunkte eines Dreiecks mit $\alpha \beta \gamma$, ihre Gegenpunkte mit $\alpha' \beta' \gamma'$, so hat das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ das Gegendreieck $\alpha'\beta'\gamma'$, die Scheiteldreiecke $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma'$, $\alpha'\beta'\gamma$; die Nebendreiecke $\alpha\beta\gamma'$, $\alpha\beta'\gamma$, $\alpha'\beta\gamma$.

§. 12. A. Wenn 3 Ebenen den Raum zunächst in 8 Ecken zerlegen, so entstehen doch gleichzeitig durch die 3 Ebenen noch mehr Ecken; nämlich solche, welche sich als Summen mehrerer der zuvor betrachteten ansehen lassen; es bildet nämlich jede der 8 Ecken mit je 2 ihrer Nebenecken, ferner mit den 3 Nebenecken und je einer Scheitecke, endlich mit den 3 Nebenecken und den 3 Scheitecken zusammen neue Ecken; sie heißen zusammengesetzte im Gegensatz gegen die 8 einfachen. Die Unterschiede zwischen einfachen und zusammengesetzten Ecken treten in mehreren Beziehungen hervor.

1. Wenn man die Ebene eines Kantenwinkels einer dreiseitigen Ecke erweitert, so tritt sie mit dieser Erweiterung aus der Ecke heraus, wenn dieselbe eine einfache ist; sie tritt für wenigstens 2 der Ebenen hinein, wenn sie eine zusammengesetzte ist.

2. Wenn man eine Kante einer dreiseitigen Ecke über die Spitze hinaus verlängert, so tritt diese Verlängerung aus der Ecke heraus, wenn die Ecke eine einfache ist, sie tritt für wenigstens 2 der Kanten hinein, wenn die Ecke eine zusammengesetzte ist.

3. Eine dreiseitige Ecke liegt in Bezug auf jede ihrer Begrenzungsebenen ganz nach einer Seite hin, wenn sie eine einfache ist; sie liegt in Bezug auf wenigstens 2 der Ebenen auf beiden Seiten, wenn sie eine zusammengesetzte ist.

4. In jeder einfachen dreiseitigen Ecke ist jeder Kantenwinkel kleiner als 2 R.; dies findet auch bei einer Klasse von zusammengesetzten Ecken statt, bei denjenigen nämlich, welche sich als die Summe einer einfachen Ecke, ihrer 3 Nebenecken und ihrer 3 Scheitecken ansehen lassen; bei den übrigen ist wenigstens 1 Kantenwinkel größer als 2 R.

5. In jeder einfachen dreiseitigen Ecke ist jeder Flächenwinkel

kleiner als $2 R.$; in jeder zusammengesetzten ist wenigstens 1 Flächenwinkel größer als $2 R.$

B. Wenn 3 Hauptkreise die Kugelfläche zunächst in 3 sphärische Dreiecke zerlegen, so entstehen doch gleichzeitig durch die 3 Hauptkreise noch mehr Dreiecke, nämlich solche, welche sich als Summen mehrerer der zuvor betrachteten ansehen lassen; es bildet nämlich jedes der zuvor betrachteten Dreiecke mit je 2 seiner Nebendreiecke, ferner mit den 3 Nebendreiecken und je 1 Scheiteldreieck, endlich mit den 3 Nebendreiecken und den 3 Scheiteldreiecken zusammen neue Dreiecke. Sie werden zusammengesetzte genannt im Gegensatz gegen die 8 einfachen.

Die Unterschiede zwischen den einfachen und zusammengesetzten Dreiecken treten in folgenden Beziehungen hervor;

1. Wenn man eine Seite eines sphärischen Dreiecks über ihre Endpunkte hinaus verlängert, so tritt sie mit ihren Verlängerungen aus dem Dreiecke heraus, wenn dasselbe ein einfaches ist; sie tritt für wenigstens 2 Seiten hinein, wenn dasselbe zusammengesetzt ist.

2. Beim sphärischen Dreiecke liegen die Gegenpunkte der 3 Eckpunkte außerhalb des Dreiecks, wenn dasselbe einfach ist; es liegen wenigstens 2 in demselben (oder in seiner Begrenzung), wenn es zusammengesetzt ist.

3. Ein einfaches sphärisches Dreieck liegt in Bezug auf jede seiner Seiten ganz nach einer Seite hin; ein zusammengesetztes liegt wenigstens in Bezug auf 2 seiner Seiten nach beiden Seiten hin.

4. In jedem einfachen sphärischen Dreieck ist jede Seite kleiner als ein Halbkreis; dies findet auch bei einer Klasse von zusammengesetzten Dreiecken statt, bei denen nämlich, welche sich als die Summe eines einfachen Dreiecks, seiner 3 Nebendreiecke und seiner 3 Scheiteldreiecke ansehen lassen; bei den übrigen ist wenigstens 1 Seite größer, als ein Halbkreis.

5. In jedem einfachen sphärischen Dreieck ist jeder Winkel kleiner als $2 R.$; in jedem zusammengesetzten ist wenigstens 1 Winkel größer als $2 R.$

§. 13. Anmerkung. In der Folge ist nur von einfachen Ecken und einfachen sphärischen Dreiecken die Rede, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich gesagt ist.

§. 14. A. Zu jeder dreiseitigen Ecke giebt es eine zweite mit der gegenseitigen Beziehung der Lage, daß die Kanten der einen auf den Flächen der andern senkrecht stehen; und mit der gegenseitigen Beziehung der Größe, daß die Kantenwinkel der einen den Flächenwinkeln der andern paarweise supplementär sind. Zwei Ecken mit dieser gegenseitigen Beziehung heißen Polarecken.

Man erhält zu einer gegebenen Ecke die Polarecke, indem man in der Spitze der Ecke auf jeder der 3 Ebenen derselben Perpendikel nach der Seite hin errichtet, nach welcher die Ecke liegt. Diese 3 Perpendikel sind die Kanten der Polarecke. Daß die beiden Ecken die angegebenen gegenseitigen Beziehungen haben, folgt aus §. 8. c.

B. Zu jedem sphärischen Dreieck giebt es ein zweites mit der gegenseitigen Beziehung der Lage, daß die Ecken des einen die Pole

der Seiten des andern sind (oder daß die Seiten des einen die Aequatoren der Ecken des andern sind); und mit der gegenseitigen Beziehung der Größe, daß die Seiten des einen den Winkeln des andern paarweise supplementär sind. Zwei Dreiecke mit dieser gegenseitigen Beziehung heißen Polardreiecke.

Man erhält zu einem Dreieck das Polardreieck, indem man zu jeder Seite denjenigen Pol nimmt, welcher nach der Seite des Dreiecks hin liegt; diese 3 Pole sind die Ecken des Polardreiecks, welches dadurch vollständig bestimmt ist. Daß die beiden Dreiecke die angegebenen gegenseitigen Beziehungen haben, folgt aus A, mit Berücksichtigung der Abhängigkeit zwischen Ecke und Dreieck.

Man kann zu einem Dreieck auch das Polardreieck in der Weise erhalten, daß man von jedem Eckpunkt aus auf den von ihm auslaufenden Seiten Bogen von 90° abschneidet, und durch deren Endpunkte Hauptkreise legt; sie sind die Aequatoren der 3 Eckpunkte.

Anmerkung. Die Polarecke einer einfachen Ecke ist immer eine einfache Ecke; das Polardreieck eines einfachen Dreiecks ist immer ein einfaches Dreieck.

§. 15. A. 1. In jeder dreiseitigen Ecke ist die Summe zweier Kantenwinkel größer als der dritte.

Folgt aus den Bemerkungen in §. 10. 3.

2. In jeder dreiseitigen Ecke ist die Differenz aus der Summe zweier Flächenwinkel und dem dritten kleiner als 2 Rechte.

Denn es seien $\alpha \beta \gamma$ die Flächenwinkel einer Ecke, $a' b' c'$ die entsprechenden Kantenwinkel der Polarecke, so ist $a' = \pi - \alpha$, $b' = \pi - \beta$, $c' = \pi - \gamma$, also $2\pi - (\alpha + \beta) > \pi - \gamma$.

$$\alpha + \beta - \gamma < \pi.$$

B. 1. In jedem sphärischen Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte. (A. 1.)

2. In jedem sphärischen Dreieck ist die Differenz aus der Summe zweier Winkel und dem dritten Winkel kleiner als 2 Rechte. (A. 2.)

§. 16. A. 1. In jeder dreiseitigen Ecke liegt die Summe der Kantenwinkel zwischen 0 und 4 Rechten.

Man berücksichtige zu der Ecke, deren Kantenwinkel $a b c$ sind, die Nebenecke, deren Kantenwinkel $a, \pi - b, \pi - c$ sind, so ist nach §. 15. A. 1.

$$\begin{aligned} (\pi - b) + (\pi - c) &> a. \\ a + b + c &< 2\pi. \end{aligned}$$

Zusatz. Derselbe Satz gilt auch für einfache mehrseitige Ecken, d. h. für solche, welche in Bezug auf jede Begrenzungsfläche ganz auf einer Seite derselben liegen. Um den Satz so allgemein gefaßt nachzuweisen, schneide man die n -seitige Ecke durch eine Ebene, welche alle Kanten, aber keine in ihrer Rückverlängerung schneidet, so entstehen auf der Begrenzungsfläche der Ecke n Dreiecke, deren Winkelsumme $n\pi$ ist; die Summe der $2n$ Dreieckswinkel an der Durchschnittsebene ist (nach §. 16. A. 1.) größer als die Summe der Winkel der Durch-

schnittsfigur, d. h. größer als $(n-2)\pi$, mithin ist die Summe der Kantenwinkel der Ecke kleiner als 2π .

2. In jeder 3seitigen Ecke liegt die Summe der 3 Flächenwinkel zwischen 2 Rechten und 6 Rechten.

Denn es seien die Flächenwinkel der Ecke $\alpha \beta \gamma$, die entsprechenden Kantenwinkel der Polarecke $a' b' c'$, so ist

$$a' + b' + c' > 0; a' + b' + c' < 2\pi$$

$$a = \pi - \alpha; b' = \pi - \beta; c' = \pi - \gamma$$

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) > 0; (\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) < 2\pi$$

$$\alpha + \beta + \gamma < 3\pi; \alpha + \beta + \gamma > \pi$$

B. 1. In jedem sphärischen Dreieck ist die Summe der 3 Seiten kleiner als der Umfang eines Hauptkreises (A. 1).

2. In jedem sphärischen Dreieck liegt die Summe der 3 Winkel zwischen 2 Rechten und 6 Rechten. (A. 2.)

§. 17. A. 1. Gleichen Kantenwinkeln einer dreiseitigen Ecke liegen gleiche Flächenwinkel gegenüber; ungleichen Kantenwinkeln ungleiche Flächenwinkel, und zwar dem größeren Kantenwinkel der größere Flächenwinkel.

Man denke sich eine Ecke, deren Spitze mit S, deren Kanten, so wie die entsprechenden Flächenwinkel mit $\alpha \beta \gamma$, deren gegenüberliegende Flächen, so wie die entsprechenden Kantenwinkel mit $a b c$ bezeichnet sein mögen; wähle in einer Kante, z. B. α , einen Punkt A, lege durch denselben 2 Ebenen senkrecht gegen die Kanten γ, β , welche dieselben in C, B schneiden, welche also die Ebenen b, c resp. in den Linien AC, AB (Perpendikel auf γ, β) schneiden, welche ferner die Ebene a in den Linien CP, BP (ebenfalls Perpendikel auf γ, β), einander also in der Linie AP schneiden, so daß diese ein Perpendikel auf der Ebene a ist: so sind die Winkel ACP, ABP nichts anders, als die Flächenwinkel γ, β , vorausgesetzt, daß der Fußpunkt P in den Winkel a hineinfällt.

Sind nun die Kantenwinkel b, c einander gleich, so sind auch die Linien AC, AB einander gleich, als entsprechende Katheten kongruenter rechtwinkliger Dreiecke; diese sind aber zugleich die Hypotenusen der beiden rechtwinkligen Dreiecke ACP, ABP, welche eine Kathete gemein haben, welche also kongruent sind, mithin die entsprechenden Winkel ACP, ABP, d. h. γ und β gleich haben.

Ist dagegen $b > c$ und sind beide spitz, so ist $AC > AB$, weil sie die Katheten zweier rechtwinkligen Dreiecke von gleicher Hypotenuse sind, welche ein Paar spitze Winkel ungleich haben, von welchen also dasjenige, welches den größeren Winkel hat, die größere gegenüberliegende Kathete enthält. AC und AB sind aber zugleich die Hypotenusen der beiden rechtwinkligen Dreiecke ACP und ABP, welche die Kathete AP gemeinsam, die Hypotenusen aber ungleich haben, von welchen also dasjenige den kleineren der gemeinsamen Kathete gegenüberliegenden Winkel hat, welches die größere Hypotenuse hat, so daß $\angle ACP < \angle ABP$, d. h. $\beta > \gamma$.

Wenn die oben aufgestellten Bedingungen, daß P innerhalb des Winkels a liegt, oder daß die beiden Winkel b und c spitz sind, nicht

erfüllt sind, so bedarf es nur einiger leichten Modificationen dieses Beweises.

2. Umgekehrt: Gleichen Flächenwinkeln einer dreiseitigen Ecke liegen gleiche Kantenwinkel gegenüber; ungleichen Flächenwinkeln ungleiche Kantenwinkel, und zwar dem größeren Flächenwinkel der größere Kantenwinkel.

Indirekt nach Analogie von Planimetrie §. 19. 2. — Direkt nach §. 14. A. — Es seien nämlich α β γ die Flächenwinkel, a b c die gegenüberliegenden Kantenwinkel einer Ecke, a' b' c' α' β' γ' die entsprechenden Winkel der Polarecke. Ist nun $\beta = \gamma$, so ist $\pi - \beta = \pi - \gamma$, d. h. $b' = c'$, folglich nach (1) $\beta' = \gamma'$, folglich $\pi - \beta' = \pi - \gamma'$, d. h. $b = c$. Ist dagegen $\beta > \gamma$, so ist $\pi - \beta < \pi - \gamma$, d. h. $b' < c'$, folglich nach (1) $\beta' < \gamma'$, folglich $\pi - \beta' > \pi - \gamma'$, d. h. $b > c$.

B. 1. Gleichen Seiten eines sphärischen Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber; ungleichen Seiten ungleiche Winkel, und zwar der größeren Seite der größere Winkel (A. 1).

2. Umgekehrt: Gleichen Winkeln eines sphärischen Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber; ungleichen Winkeln ungleiche Seiten, und zwar dem größeren Winkel die größere Seite. (A. 2.)

§. 18. Folgerungen.

A. 1. Der geometrische Ort einer graden Linie im Raume, welche mit 2 einander schneidenden Linien, durch deren Durchschnittspunkt sie geht, gleiche Winkel bildet, besteht aus 2 Ebenen, welche auf der Ebene der gegebenen graden Linien senkrecht stehen und ihre Winkel halbiren. Jede Linie, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Linien gezogen wird, und nicht in einer der beiden Ortsebenen liegt, bildet mit derjenigen der beiden Linien den kleineren spitzen Winkel, mit welcher sie demselben von den Ortsebenen gebildeten rechten Winkel angehört. Sollen von den Linien nur 2 vom Scheitelpunkte nach je einer Richtung ausgehende Stücke in Betracht gezogen werden, so reducirt sich der Ort auf eine der beiden Ebenen.

Zusatz. Der geometrische Ort einer graden Linie, welche von 2 gegebenen ihr parallelen graden Linien gleich weit entfernt ist, ist eine Ebene, welche auf der Ebene der Parallelen senkrecht steht, und deren Durchschnittslinie mit der Ebene derselben Parallelen in der Mitte zwischen den beiden gegebenen Parallelen liegt.

2. Der geometrische Ort der Durchschnittslinie zweier Ebenen, welche eine gegebene Ebene in 2 festen graden Linien schneiden, und mit derselben gleiche Winkel bilden, besteht aus 2 Ebenen, welche auf der gegebenen Ebene senkrecht stehen, und die Winkel der beiden Linien halbiren. — Soll von den Winkeln, welche jede der veränderlichen Ebenen mit der festen Ebene bildet, nur je 1 bestimmter in Betracht gezogen werden, so reducirt sich der Ort auf eine der beiden Ebenen.

Zusatz. Der geometrische Ort der Durchschnittslinie zweier Ebenen, welche 2 parallele grade Linien enthalten, und mit der Ebene der beiden Parallelen jede nach der Seite der ihr fremden Parallele

hin, gleiche Winkel bilden, ist eine feste Ebene, welche auf der Ebene der Parallelen senkrecht steht, und deren Durchschnitt mit der Ebene der Parallelen in der Mitte zwischen denselben liegt.

B. 1. Der geometrische Ort eines Punktes einer gegebenen Kugeloberfläche, welcher von 2 festen Punkten derselben gleiche sphärische Entfernungen hat, ist ein Hauptkreis, welcher die sphärische Entfernung der beiden festen Punkte halbiert, und auf ihr senkrecht steht.

2. Der geometrische Ort des Durchschnittspunktes zweier Hauptkreisbogen, welche durch 2 feste Punkte der Kugeloberfläche gehen, und mit dem durch sie gelegten Hauptkreise 2 gleiche Winkel bilden, besteht aus 2 Hauptkreisen, welche auf diesem Hauptkreise senkrecht stehen, und welche die 4 Bogen in welche derselbe durch die beiden gegebenen Punkte und ihre beiden Gegenpunkte getheilt wird, halbiren. — Soll von den 2 verschiedenen Winkeln, welche jeder der veränderlichen Bogen mit dem festen Hauptkreise bildet, nur je ein bestimmter in Betracht kommen, so reducirt sich der Ort auf einen der beiden Hauptkreise.

§. 19. Congruenzsätze von der dreiseitigen Ecke — vom sphärischen Dreieck.

I. 1. Eine dreiseitige Ecke ist vollständig bestimmt durch ihre 3 Kantenwinkel. — Ein sphärisches Dreieck ist vollständig bestimmt durch seine 3 Seiten. — Oder: Zwei dreiseitige Ecken sind **kongruent oder symmetrisch**, wenn sie paarweise gleich haben alle 3 Kantenwinkel. — Zwei sphärische Dreiecke sind **kongruent oder symmetrisch**, wenn sie paarweise gleich haben alle 3 Seiten.

Der Beweis läßt sich vollständig nach Analogie von Planimetrie §. 23. 4 führen; befriedigender jedoch dadurch, daß man die 3 Flächenwinkel als durch die 3 Kantenwinkel vollständig bestimmt nachweist, indem man sie in einer Ebene konstruirt. Es kann dies auf doppelte Art geschehen.

a. In §. 17 sind die beiden an der Ebene α anliegenden Winkel Fig. 1. β und γ auf Linienwinkel zurückgeführt. Denkt man sich in der dort betrachteten Ecke die beiden Kantenwinkel b und c durch Umdrehung und die Kanten γ und β , die beiden Dreiecke PCA und PBA durch Umdrehung um die Seiten PC , PB in die Ebene des Winkels α niedergelegt, so liegen alle dort betrachteten Theile der Figur in einer Ebene. Die Kante α tritt in 2 Lagen α_1 , α_2 auf; der Punkt A in 4 Lagen A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ; das Perpendikel AP in 2 Lagen A_3P und A_1P .

Wenn die 3 Winkel a , b , c gegeben sind, so ist diese Figur vollständig bestimmt und konstruirbar. Man lege die Winkel a , b , c als Folgewinkel an einander, so daß a zwischen den beiden andern Winkeln liegt; nehme in den beiden äußeren Schenkeln α_1 , α_2 2 Punkte A_1 , A_2 in gleicher Entfernung vom gemeinsamen Scheitel S an; fälle von A_1 und A_2 auf die gemeinsamen Schenkel β und γ die Perpendikel A_1B und A_2C ; verlängere dieselben, bis sie sich in P schneiden; errichte in P Perpendikel auf BP und CP ; ziehe von B und C aus Kreise mit den Radien A_1B und A_2C , welche jene Perpendikel in A_3 und A_4

schneiden, verbinde **B** und **C** mit A_3 und A_4 , so sind dadurch die der Ebene *a* anliegenden Flächenwinkel konstruirt; und zwar, wenn der Punkt **P** im Winkel *a* liegt, so ist $A_3BP = \beta$, $A_4CP = \gamma$; wenn **P** im Nebenwinkel von *a* über β hinaus liegt, so ist $\pi - A_3BP = \beta$, $A_4CP = \gamma$; wenn **P** im Nebenwinkel von *a* über γ hinaus liegt, so ist $A_3BP = \beta$, $\pi - A_4CP = \gamma$; wenn **P** im Scheitelwinkel von *a* liegt, so ist $\pi - A_3BP = \beta$, $\pi - A_4CP = \gamma$. Eine Construktionsprobe hat man darin, daß $A_3P = A_4P$ sein muß.

Demnach sind die Flächenwinkel β und γ durch *a*, *b*, *c* vollständig bestimmt; ebenso läßt sich α konstruiren und als vollständig bestimmt nachweisen, indem man *a* und *b* in die Ebene des Winkels *c*, oder *a* und *c* in die Ebene des Winkels *b* niederlegt. Es läßt sich aber auch jeder Flächenwinkel, insbesondre z. B. der Winkel α in die Ebene des gegenüberstehenden Kantenwinkels niederlegen, und dadurch erhält man eine 2te Construktionsprobe jedes einzelnen Flächenwinkels, wenn die 3 Kantenwinkel gegeben sind.

b. Man lege zu dem Ende durch einen willkürlich gewählten Punkt **A** einer Kante α eine Ebene senkrecht gegen diese Kante, welche die Kanten β und γ in **B** und **C**, die Ebenen der *a*, *b*, *c* also in **BC**, **AC**, **AB** schneidet; dann ist $\angle BAC = \alpha$. Legt man nun die Seitenflächen *b* und *c* durch Umdrehung um die Kanten γ und β , und das Dreieck **BAC** durch Umdrehung um die Seite **BC** in die Ebene *a* nieder, so erhält man die Fig. 2, in welcher **A** in den 3 Lagen A_1 , A_2 , A_3 , die Seite **AB** in den 2 Lagen A_1B , A_3B , die Seite **AC** in den 2 Lagen A_2C , A_3C auftritt.

Fig. 2. Diese ebene Figur ist vollständig bestimmt und konstruirbar durch die 3 Kantenwinkel *a*, *b*, *c*. Man lege nämlich dieselben als Folgewinkel am gemeinsamen Scheitel **S** zusammen, so daß *a* zwischen den beiden andern liegt; wähle in den Endschenkeln α_1 , α_2 2 Punkte A_1 , A_2 gleich weit von **S** entfernt, errichte in ihnen Perpendikel auf α_1 und α_2 , welche β und γ in **B** und **C** schneiden, und konstruire aus den 3 Seiten **BC**, A_2C , A_1B das Dreieck **BCA₃**, so ist $\angle BA_3C = \alpha$ wenn die Punkte **B** und **C** beide in den Schenkeln β und γ selbst oder beide in deren Rückverlängerungen liegen; es ist $\angle BA_3C = \pi - \alpha$ wenn einer der beiden Punkte im Schenkel selbst, der andre in der betreffenden Rückverlängerung liegt. Das eine tritt ein, wenn die Winkel *b* und *c* beide spitz oder beide stumpf sind; das andre, wenn der eine spitz, der andre stumpf ist.

Die eine oder die andre Construktionsprobe wird nur dann unmöglich, wenn die Bedingungen des §. 15. A. 1 und §. 16. A. 1 nicht erfüllt sind; es erweist sich das in Bezug auf die erstere Bedingung leicht, wenn man die Winkel *b* und *c* in den Winkel *a* hinein, statt, wie es in der Fig. 1 und 2 geschehen ist, neben den Winkel *a* legt. Die 2te Construktionsprobe wird illusorisch, wenn einer der beiden Winkel *b* und *c* gleich $\frac{\pi}{2}$ ist; wenn beide $= \frac{\pi}{2}$ sind, so ist bekanntlich $\alpha = a$.

2. Eine dreiseitige Ecke ist vollständig bestimmt durch ihre 3 Flächenwinkel. — Ein sphärisches Dreieck ist vollständig bestimmt durch seine 3 Winkel. — Oder:

Zwei dreiseitige Ecken sind **kongruent oder symmetrisch** wenn sie paarweise gleich haben alle 3 Flächenwinkel. — Zwei sphärische Dreiecke sind **kongruent oder symmetrisch** wenn sie paarweise gleich haben alle 3 Winkel.

Ergiebt sich aus 1 durch Berücksichtigung der Polarecke. Durch die 3 Flächenwinkel einer Ecke sind die 3 Kantenwinkel der Polarecke bestimmt, dadurch nach 1. die Flächenwinkel der Polarecke, dadurch die Kantenwinkel der Ecke selbst. Die Mittel zur planimetrischen Konstruktion liegen herein. Die Bedingungen der Möglichkeit liegen in §. 15. A. 2, §. 16. A. 2 oder §. 15. B. 2. §. 16. B. 2.

II. 1. Eine dreiseitige Ecke ist vollständig bestimmt durch 2 Kantenwinkel und den eingeschlossenen Flächenwinkel. — Ein sphärisches Dreieck ist vollständig bestimmt durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel. Oder: Zwei dreiseitige Ecken sind **kongruent oder symmetrisch**, wenn sie paarweise gleich haben 2 Kantenwinkel und den eingeschlossenen Flächenwinkel. — Zwei sphärische Dreiecke sind **kongruent oder symmetrisch**, wenn sie paarweise gleich haben 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel.

Der Beweis läßt sich vollständig nach Analogie von Planimetrie §. 23. 2 führen; befriedigender jedoch dadurch, daß man den dritten Kantenwinkel und die 2 andern Flächenwinkel als durch die beiden gegebenen Kantenwinkel und den gegebenen Flächenwinkel vollständig bestimmt nachweist, indem man sie in einer Ebene konstruirt. Es kann dies auf doppelte Art geschehen, entsprechend den beiden Konstruktionen unter I. 1.

a. Es seien α und γ die gegebenen Kantenwinkel, β der gegebene Flächenwinkel. Man lege die beiden Kantenwinkel α und γ als anliegende Winkel an einander; β sei ihr gemeinsamer, α_1 und γ_1 ihre nicht gemeinsamen Schenkel. Man wähle in α_1 irgend einen Punkt A_1 , falle von ihm ein Perpendikel A_1B auf β , verlängere es über B hinaus, lege in B an die Verlängerung von A_1B oder an A_1B selbst, je nachdem γ spitz oder stumpf ist, den gegebenen Winkel β an, mache den Schenkel BA_2 desselben gleich BA_1 , falle von A_2 ein Perpendikel A_2P auf die Richtung der Linie A_1B , falle von P ein Perpendikel PC auf γ_1 , errichte in P auf PC ein Perpendikel $PA_3 = PA_1$, ziehe CA_3 so ist $\angle PCA_3$ der dem γ gegenüberliegende Flächenwinkel γ , wenn P auf der Seite des Schenkels γ liegt, auf welcher $\angle \alpha$ liegt, und $\angle PCA_3 = \pi - \gamma$, wenn P auf der entgegengesetzten Seite desselben liegt; dann verlängere man PC über C hinaus, bestimme auf der Verlängerung einen Punkt A_2 so, daß $CA_2 = CA_3$, ziehe SA_2 , so ist $\angle CSA_2$ der dem gegebenen Winkel β gegenüberliegenden Kantenwinkel b , wenn C auf dem Schenkel γ selbst liegt, dagegen $= \pi - b$, wenn C auf der Rückverlängerung des Schenkels γ liegt. — Eine Konstruktionsprobe hat man darin daß $SA_2 = SA_1$ sein muß.

In gleicher Weise kann man $\angle \alpha$ und b konstruiren, wenn man von einem Punkte der Linie γ aus grade so verfährt, wie so eben von einem Punkte der Linie α_1 aus; am einfachsten aber erhält man

den Winkel α , wenn man ihn nach I. 1. b aus a , c und dem nun gegebenen Winkel b konstruirt.

b. Auch nach den Bemerkungen in I. 1. b läßt sich leicht aus den gegebenen Kantenwinkeln a und c und dem eingeschlossenen Flächenwinkel β der 3te Kantenwinkel b konstruiren. Es seien p_1, q_1 die Schenkel, S_1 der Scheitel des gegebenen Winkels a , p_2, q_2 die Schenkel, S_2 der Scheitel des Winkels c . Man wähle in p_1 und p_2 2 Punkte P_1 und P_2 so, daß $S_1 P_1 = S_2 P_2$; errichte in P_1 und P_2 Perpendikel auf p_1 und p_2 , welche q_1 und q_2 in Q_1 und Q_2 schneiden, bilde aus $P_1 Q_1, P_2 Q_2$ und dem gegebenen Winkel β oder seinem Nebenwinkel $\pi - \beta$ das Dreieck $\alpha\beta\lambda$; das erstere, wenn a und c beide spitz oder beide stumpf, das letztere, wenn einer von beiden spitz, der andre stumpf ist; bilde aus den Seiten $\alpha\lambda, S_1 Q_1$ und $S_2 Q_2$ das Dreieck $\alpha\delta\lambda$, so ist $\angle \delta$ entweder der Kantenwinkel b oder sein Nebenwinkel $\pi - b$; das erstere, wenn a und c beide spitz oder beide stumpf; das letztere, wenn einer spitz, der andre stumpf ist. — Die Konstruktion wird nur dann illusorisch, wenn einer der beiden Winkel a und c gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Wenn beide $= \frac{\pi}{2}$ sind, so ist bekanntlich $b = \beta$.

— Wenn hierdurch b gefunden ist, so lassen sich nach I. 1. die beiden Winkel α und γ konstruiren; alle diese Stücke sind durch die 3 gegebenen vollständig bestimmt.

Die Aufgabe ist immer möglich.

2. Eine dreiseitige Ecke ist vollständig bestimmt durch 1 Kantenwinkel und die beiden anliegenden Flächenwinkel. — Ein sphärisches Dreieck ist vollständig bestimmt durch 1 Seite und die beiden anliegenden Winkel. — Oder: Zwei dreiseitige Ecken sind **kongruent oder symmetrisch**, wenn sie paarweise gleich haben 1 Kantenwinkel und die beiden anliegenden Flächenwinkel. — Zwei sphärische Dreiecke sind **kongruent oder symmetrisch**, wenn sie paarweise gleich haben 1 Seite und die beiden anliegenden Winkel.

Ergiebt sich aus II. 1. durch Betrachtung der Polarecke, des Polardreiecks. Durch 1 Kantenwinkel und die beiden anliegenden Flächenwinkel einer Ecke sind 2 Kantenwinkel und der eingeschlossene Flächenwinkel der Polarecke vollständig bestimmt, dadurch der 3te Kantenwinkel und die beiden anliegenden Flächenwinkel der Polarecke, dadurch der 3te Flächenwinkel und die beiden einschließenden Kantenwinkel der Ecke selbst. Die Mittel zur planimetr. Konstruktion liegen hierin nach 1.

Die Aufgabe ist immer möglich.

III. 1. Eine dreiseitige Ecke ist im Allgemeinen **zweideutig** bestimmt durch 2 Kantenwinkel und den einer von beiden gegenüberliegenden Flächenwinkel. — Ein sphärisches Dreieck ist im Allgemeinen **zweideutig** bestimmt durch 2 Seiten und den einer von beiden gegenüberliegenden Winkel. — Oder: Zwei dreiseitige Ecken sind

Kongruent oder symmetrisch, wenn sie paarweise gleich haben 2 Kantenwinkel und den einer von beiden gegenüberliegenden Flächenwinkel, und wenn überdies der dem andern Kantenwinkel gegenüberliegende Flächenwinkel in beiden stumpf oder in beiden spitz ist. — Zwei sphärische Dreiecke sind **kongruent oder symmetrisch**, wenn sie paarweise gleich haben 2 Seiten und den einer von beiden gegenüberliegenden Winkel, und wenn überdies die der andern Seite gegenüberliegenden Winkel in beiden spitz oder in beiden stumpf sind.

Nähere Bestimmung und Beweis. Es seien gegeben die Kantenwinkel (Seiten) b und c und der Flächenwinkel, (sphärischer Winkel) β . Man denke sich auf eine der Schenkelflächen des Winkels β an der Kante β den Winkel c in irgend einem Punkte angelegt, so heißt dessen Endschenkel α . Es giebt nun im Allgemeinen in der 2ten Schenkelfläche des $\angle \alpha$ 2 durch den Scheitel von c gehende Linien, welche mit dem Schenkel α den $\angle b$ bilden (§. 5.) und danach im Allgemeinen 2 Ecken (Dreiecke), welche die gegebenen Bedingungen erfüllen, und welche sich zunächst dadurch unterscheiden, daß der Winkel γ in dem einen spitz, in dem andern stumpf ist, in der Art, daß die beiden sich zu π ergänzen. Daraus ergibt sich sogleich die Richtigkeit der aufgestellten Bedingungen der Congruenz oder Symmetrie. — Die beiden Linien können unmöglich werden, sie können in eine zusammenfallen, sie können, wenn sie existiren, für die Aufgabe nichtsagend sein; es können noch andre besondere Fälle eintreten. Um sie näher zu erörtern, bezeichnen wir den spitzen Winkel, welchen der Schenkel α mit der 2ten Schenkelfläche des $\angle \beta$ bildet (§. 5.), mit φ , und unterscheiden 2 Hauptfälle, nämlich daß $\beta < \frac{\pi}{2}$ und $\beta > \frac{\pi}{2}$ ist, und den Grenzfall zwischen beiden, daß $\beta = \frac{\pi}{2}$ ist.

A. Es sei $\beta < \frac{\pi}{2}$. Wenn dann

1. $c < \frac{\pi}{2}$ ist, so muß, damit eine Ecke möglich sei $b > \varphi$ und $< \pi - c$ sein; es sind dann 2 Ecken möglich wenn $b < c$ ist; 1 Ecke, wenn $b > c$ ist, und in dieser 1 Ecke ist $\angle \gamma$ spitz.

2. Wenn $c > \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $b > \varphi$ und $< c$ sein; es sind dann 2 Ecken möglich, wenn $b < \pi - c$ ist; 1 Ecke, wenn $b > \pi - c$ ist; und in dieser 1 Ecke ist $\angle \gamma$ stumpf.

3. (Grenzfall) Wenn $c = \frac{\pi}{2}$ ist, so muß, $b > \varphi$ (φ ist dann $= \beta$) und $< \frac{\pi}{2}$ sein; es sind dann immer 2 Ecken mög-

lich, von der Art, daß nicht nur die beiden Flächenwinkel γ derselben, sondern auch die beiden Kantenwinkel a sich zu π ergänzen.

B. Es sei $\beta > \frac{\pi}{2}$ Wenn dann

1. $c < \frac{\pi}{2}$ ist, so muß, damit überhaupt eine Ecke möglich sei, $b < \pi - \varphi$ und $> c$ sein. Es sind dann 2 Ecken möglich, wenn $b > \pi - c$ ist, 1 Ecke, wie $b < \pi - c$ ist; in dieser 1 Ecke ist $\angle \gamma$ spitz.

2. Wenn $c > \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $b < \pi - \varphi$ und $> \pi - c$ sein; es sind dann 2 Ecken möglich, wenn $b > c$; 1 Ecke, wenn $b < c$; in dieser 1 Ecke ist $\angle \gamma$ stumpf.

3. (Grenzfall) Wenn $c = \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $b < \pi - \varphi$ ($\pi - \varphi$ ist dann $= \beta$) und $> \frac{\pi}{2}$ sein; es sind dann immer 2 Ecken möglich, in der Art, daß nicht nur die beiden Flächenwinkel γ desselben, sondern auch die beiden Kantenwinkel a sich zu π ergänzen.

C. Grenzfall zwischen (A) und (B).

Es sei $\beta = \frac{\pi}{2}$. Wenn dann

1. $c < \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $b > \varphi$ (φ ist dann $= c$) und $< \pi - \varphi$ sein; es ist dann 1 Ecke möglich, in welcher γ spitz ist.

2. Wenn $c > \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $b > \varphi$ (φ ist dann $= \pi - c$) und $< \pi - \varphi$ sein; es ist dann 1 Ecke möglich, in welcher γ stumpf ist.

3. (Grenzfall.) Wenn $c = \frac{\pi}{2}$ so muß $b = \frac{\pi}{2}$ sein; es sind dann unendlich viele Ecken möglich.

In allen Ecken also, in welchen 1 Kantenw. und 1 anliegender Flächenwinkel $= \frac{\pi}{2}$ sind, ist auch der dem Flächenwinkel

gegenüberliegende Kantenwinkel $= \frac{\pi}{2}$; in diesem Falle findet kein Schluß auf Congruenz oder Symmetrie statt.

Die Darstellung der nicht unmittelbar gegebenen Stücke der Ecke durch planimetrische Konstruktion entsprechend denen in I. 1 und II. 1 wird unter 2 ausgeführt, und die hieher gehörige aus der unter 2 durch Vermittlung der Polarecke abgeleitet. Daß trotzdem dieser Satz jenem vorangestellt ist, hat darin seinen Grund, daß die angegebene

Determination aus der körperlichen Anschauung sich viel leichter für die hier aufgestellten Bedingungen als für die unter 2 aufzustellenden ergibt.

III. 2. Eine dreiseitige Ecke ist im Allgemeinen **zweideutig** bestimmt durch 2 Flächenwinkel und den einem von beiden gegenüberliegenden Kantenwinkel. — Ein sphärisches Dreieck ist im Allgemeinen **zweideutig** bestimmt durch 2 Winkel und die einem von beiden gegenüberliegende Seite. Oder: Zwei dreiseitige Ecken sind **kongruent oder symmetrisch** wenn sie paarweise gleich haben 2 Flächenwinkel und den einem von beiden gegenüberliegenden Kantenwinkel, wenn überdies der dem andern Flächenwinkel gegenüberliegende Kantenwinkel in beiden Ecken spitz oder in beiden Ecken stumpf ist. — Zwei sphärische Dreiecke sind kongruent oder symmetrisch, wenn sie paarweise gleich haben 2 Winkel und die einem von beiden gegenüberliegende Seite, wenn überdies die dem andern Winkel gegenüberliegende Seite in beiden Dreiecken größer oder in beiden Dreiecken kleiner ist als ein Quadrant.

Der Satz mit allen seinen näheren Bestimmungen ergibt sich aus dem vorigen vermittelt der Betrachtung der Polarecke, wenn man nur bedenkt, daß der Winkel einer Kante einer 3seitigen Ecke mit der gegenüberliegenden Ebene gleich ist dem entsprechenden Winkel einer Ebene der Polarecke mit der gegenüberliegenden Kante.

Bezeichnet man die gegebenen Flächenwinkel mit β und γ ; den Kantenwinkel mit b , den Winkel der Kante α und der Ebene a wieder mit φ , und unterscheidet wieder die 2 Hauptfälle, daß $b > \frac{\pi}{2}$ und $b < \frac{\pi}{2}$ ist, und den Grenzfall, daß $b = \frac{\pi}{2}$ ist, so erhält man folgende Bestimmungen:

A. Es sei $b > \frac{\pi}{2}$. Wenn dann

1. $\gamma > \frac{\pi}{2}$ ist, so muß, damit überhaupt eine Ecke möglich sei, $\beta < \pi - \varphi$ und $> \pi - \gamma$ sein; es sind dann 2 Ecken möglich, wenn $\beta < \gamma$, 1 Ecke, wenn $\beta > \gamma$ und in dieser Ecke ist c stumpf.

2. Wenn $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $\beta > \pi - \varphi$ und $< \gamma$ sein; es sind dann 2 Ecken möglich, wenn $\beta > \pi - \gamma$, 1 Ecke wenn $\beta < \pi - \gamma$ ist, und in dieser 1 Ecke ist c spitz.

3. (Grenzfall.) Wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $\beta < \pi - \varphi$ ($\pi - \varphi$ ist dann $= b$) und $> \frac{\pi}{2}$ sein; es sind dann immer

2 Ecken möglich von der Art, daß nicht nur die beiden Kantenwinkel c derselben, sondern auch die beiden Flächenwinkel α sich zu π ergänzen.

B. Es sei $b < \frac{\pi}{2}$. Wenn dann

1. $\gamma > \frac{\pi}{2}$ ist, so muß, damit überhaupt eine Ecke möglich sei, $\beta > \varphi$ und $< \gamma$ sein; es sind dann 2 Ecken möglich, wenn $\beta < \pi - \gamma$ ist; 1 Ecke, wenn $\beta > \pi - \gamma$ ist, und in dieser 1 Ecke ist $\angle c$ stumpf.

2. Wenn $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $\beta > \varphi$ und $< \pi - \gamma$ sein. Es sind dann 2 Ecken möglich, wenn $\beta < \gamma$, 1 Ecke, wenn $\beta > \gamma$, und in dieser 1 Ecke ist $\angle c$ spitz.

3. (Grenzfall.) Wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $\beta > \varphi$ sein (φ ist dann $= b$) und $< \frac{\pi}{2}$ sein. Es sind dann immer 2 Ecken

möglich von der Art, daß nicht nur die beiden Kantenwinkel c derselben, sondern auch die beiden Flächenwinkel α sich zu π ergänzen.

C. Grenzfall zwischen (A) und (B).

Es sei $b = \frac{\pi}{2}$. Wenn dann

1. $\gamma > \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $\beta > \varphi$ (φ ist dann $= \pi - \gamma$) und $< \pi - \varphi$ sein. Es ist dann 1 Ecke möglich, in welcher c stumpf ist.

2. Wenn $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $\beta > \varphi$ (φ ist dann $= \gamma$) und $< \pi - \varphi$ sein; dann ist 1 Ecke möglich, in welcher c spitz ist.

3. Wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, so muß $\beta = \frac{\pi}{2}$ sein; es sind dann unendlich viele Ecken möglich.

In allen Ecken also, in welchen 1 Kantenwinkel und 1 anliegender Flächenwinkel $= \frac{\pi}{2}$ sind, ist auch der dem Flächenwinkel gegenüberliegende Kantenwinkel $\frac{\pi}{2}$. In diesem Falle findet kein Schluß auf Congruenz oder Symmetrie statt.

Fig. 1. Zum Behufe der Darstellung der nicht unmittelbar gegebenen Stücke durch planimetrischen Construction, lege man den gegebenen Kantenwinkel b in die Ebene der Zeichnung, falle von einem willkürlichen Punkte A_2 des einen Schenkels α_2 desselben ein Perpen-

Winkel A, C auf den andern Schenkel γ , verlängere dasselbe über den Fußpunkt C hinaus, lege an diese Verlängerung im Punkte C den gegebenen Winkel γ an, schneide in dessen Endschenkel von C aus ein Stück $CA_4 = CA_2$ ab, fälle von A_4 ein Perpendikel auf den Anfangsschenkel, so ist der Fußpunkt P der Fußpunkt des in der körperlichen Ecke vom Punkte A , dessen 2 Bilder in der Ebene A_2 und A_4 sind, auf die gegenüberstehende Ebene gefällten Perpendikels. Es kommt nun darauf an, den Kantenwinkel a zu konstruiren; dieser wird gefunden sein, wenn der Punkt B gefunden ist; es liegt aber der Punkt B mit den Punkten S, C, P in einem Kreise, dessen Durchmesser SP ist; ferner ist die Entfernung des Punktes B von P gegeben, denn BP ist Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andre Kathete $PA_3 = PA_4$ also gegeben, und dessen Winkel β oder $\pi - \beta$, welcher dieser Kathete gegenüberliegt, ebenfalls gegeben ist. Die so bestimmte Linie BP trage man von P aus in den Kreis ein, so erhält man den Winkel a und kann nun nach II. 1. die Konstruktion vollenden.

Es ist eine sehr angemessene Uebung, die eben entwickelte Determination, so wie sie aus körperlicher Anschauung abgeleitet ist, nun auch aus dieser planimetrischen Konstruktion abzuleiten. Man bemerkt zunächst, daß im Allgemeinen die Sehne BP sich in 2 Lagen in den Kreis eintragen läßt; daß die Aufgabe unmöglich wird, wenn die einzutragende Sehne größer ist, als der Durchmesser; wann, hängt vom $\angle \varphi$ ab; es ist also nöthig, daß der $\angle \varphi$ ebenfalls konstruirt werde; derselbe ist Winkel eines rechtwinkl. Dreiecks, dessen eine Kathete $= PS$ und dessen andre Kathete $= PA_3$ ist, und zwar derjenige Winkel, welcher der letztern Kathete gegenüberliegt. Wenn $BP < PS$ ist, so können die beiden Lagen des Punktes B , oder 1 derselben für die Aufgabe nichtsagend sein; in jenem Falle hat die Aufgabe auch keine Auflösung, in diesem eine. Das Letztere findet in der vorliegenden Figur statt, wo $b < \frac{\pi}{2} \gamma < \frac{\pi}{2}$ und $\beta > \gamma$ ist. (Vergl.

B. 2.) Wenn insbesondere der Fall C. 3 eintritt, so fallen die Punkte S, C, P in einem Punkte zusammen, auf welchen sich also auch der durch diese Punkte zu legende Kreis reducirt.

Anm. Die gegenseitige Abhängigkeit, welche zwischen den Kanten- und Flächenwinkeln einer dreiseitigen Ecke, den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks besteht, und welche hier geometrisch entwickelt und graphisch dargestellt ist, wird in der sphärischen Trigonometrie durch Gleichungen dargestellt. Die unter III sich ergebenden Bestimmungen lassen sich mit Hülfe der trigonometrischen Funktionen unter einfachere Form bringen. (Sph. Trig. S. 45.)

§. 20. Jedes von Flächen vollständig begrenzte räumliche Gebilde heißt ein Körper. Die Begrenzungsflächen können ebene oder gekrümmte sein. Die Elementargeometrie betrachtet nur die von Ebenen begrenzten Körper, Polyeder; ferner 2 theils gradflächig, theils krummflächig begrenzte Körper, den Cylinder und den Kegel; und einen von einer krummen Fläche begrenzten Körper, die Kugel.

Erstes Capitel.

Allgemeine Eigenschaften der Polyeder.

§. 21. Die Formen der Polyeder sind unendlich mannigfaltig. Diese Mannigfaltigkeit ist zunächst bedingt durch Form und Größe der Begrenzungsflächen, durch Form und Größe der Ecken. Wie bei den Ecken sollen die Durchschnittslinien je zweier anstoßenden Begrenzungsflächen, Kanten, die Winkel der Begrenzungsfiguren Kantenwinkel genannt werden. Es soll die Anzahl der Kanten mit K , die Anzahl der Kantenwinkel mit W , die Anzahl der Ecken mit E , die Anzahl der Begrenzungsfiguren mit F , die Summe der Kantenwinkel mit S bezeichnet und in Bezug auf diese Größen folgende allgemeine Eigenschaften entwickelt werden.

§. 22. 1. $W = 2K$, denn jede Kante ist Schenkel von 2 Kantenwinkeln und jeder Kantenwinkel hat 2 Kanten zu Schenkeln. — Es ist demnach $K = \frac{1}{2} W$, W also immer eine grade Zahl. Wenn also ein Körper Begrenzungsfiguren von ungrader Seitenzahl hat, so ist deren Anzahl immer eine grade Zahl.

2. $K \geq 3F$, denn jede Begrenzungsfigur hat mindestens 3

Winkel. — Es ist demnach $F \leq \frac{2}{3} K$ d. h. F ist niemals größer als $\frac{2}{3} K$.

3. $W \geq 3 E$, denn jede Ecke hat mindestens 3 Kantenwinkel. — Es ist demnach $E \leq \frac{2}{3} K$, d. h. E ist niemals größer als $\frac{2}{3} K$.

4. $S = (K - F) 2\pi$. Denn wenn die Begrenzungsfiguren des Polyeders einzeln $k_1, k_2, k_3, k_4, \dots$ Kanten haben, so sind die Winkelsummen der einzelnen Begrenzungsfiguren

$$(k_1 - 2) \pi$$

$$(k_2 - 2) \pi$$

$$(k_3 - 2) \pi$$

also, da die Anzahl der Summanden F ist, so ist die Kantenwinkelsumme des Polyeders

$$S = (k_1 + k_2 + k_3 + \dots) - 2 F \pi$$

$$= (2 K - 2 F) \pi = (K - F) 2\pi$$

5. $S = (E - 2) 2\pi$. Man projicire den Körper auf eine beliebige Ebene, jedoch so, daß keine 2 Ecken des Körpers in der Projektion zusammenfallen. Man kann dann die Projektion als ein doppelt gelegtes Vieleck betrachten, als 2 auf einander gelegte Vielecke, welche in der äußern Begrenzung übereinstimmen. In dieser äußeren Begrenzung mögen e' Ecken liegen, so liegen im Innern der beiden Vielecke noch $e'' = E - e'$ Ecken. Die Summe der Winkel der beiden auf einander liegenden e' -Ecke ist $(e' - 2) 2\pi$. Die Winkelsumme um jeden der e'' Punkte im Innern ist $2e'' \pi$, also ist die Summe der Projektionen der Kantenwinkel $= (e' + e'' - 2) 2\pi = (E - 2) 2\pi$. Dies ist aber offenbar auch die Kantenwinkelsumme des Polyeders. Denn da jede Begrenzungsfigur durch die Projektion ihre Seitenzahl nicht ändert, so ändert sie auch ihre Winkelsumme nicht, also ist $S = (E - 2) 2\pi$.

6. $E + F = K + 2$. Folgt aus 4 u. 5. (Eulerscher Satz.)

7. $K + 6 \leq 3 E$ oder $K \leq 3 (E - 2)$. Denn substituirt man in die Gleichung (2) $F \leq \frac{2}{3} K$ den Ausdruck $F = K - E + 2$ (6) so erhält man

$$K - E + 2 \leq \frac{2}{3} K$$

$$3 K - 3 (E - 2) \leq 2 K$$

$$K \leq 3 (E - 2)$$

Demnach giebt es kein Polyeder, dessen Ecken sämtlich mehr als 5 Kanten hätten. Denn wenn ein Polyeder lauter mehr als fünfseitige Ecken hätte, so wäre $W \geq 6 E$ also $K \geq 3 E$, was nach dem Vorhergehenden nicht möglich ist.

8. $K + 6 \leq 3 F$ oder $K \leq 3 (F - 2)$. Folgt ebenso aus (3) und (6) wie (7) aus (2) und (6).

Demnach giebt es kein Polyeder, dessen Begrenzungsfiguren sämtlich mehr als 5 Ecken hätten. Denn wenn ein Polyeder von

lauter mehr als fünffseitigen Begrenzungsfiguren umschlossen wäre, so wäre $W \leq 6 F$ also $K \leq 3 F$; was nach dem Vorhergehenden nicht möglich ist.

9. $F + 4 \leq 2 E$ oder $F \leq 2 (E - 2)$. Folgt aus (7) und (2)

10. $E + 4 \leq 2 F$ oder $E \leq 2 (F - 2)$. Folgt aus (8) und (3.)

11. Demnach liegt in jedem Polyeder E zwischen den Grenzen $\frac{1}{2} F + 2$ (nach 9) und $2F - 4$ (nach 10) und F zwischen den Grenzen $\frac{1}{2} E + 2$ (nach 10) und $2E - 4$ (nach 9).

12. Aus (7) und (3) ergibt sich, daß es keinen Körper giebt, in welchem die Anzahl der Ecken kleiner als 4, aus (8) und (2), daß es keinen Körper giebt, in welchem die Anzahl der Flächen kleiner als 4, aus diesen beiden Resultaten in Verbindung mit (6), daß es keinen Körper giebt, in welchem die Anzahl der Kanten kleiner als 6 ist. Einen Körper, in welchem $E = 4$, $F = 4$, $K = 6$ ist, erhält man leicht, indem man eine einfache dreiseitige Ecke durch eine Ebene schneidet. Der so entstandene Körper, das Tetraeder, ist also der einfachste aller Körper.

Zweites Capitel.

Von den prismatischen und pyramidalischen Körpern.

A. Von den prismatischen pyramidalischen Formen im Allgemeinen.

a. Prismatische Formen.

§. 22. Bewegt man eine unbegrenzte grade Linie parallel mit sich selbst, den Umfang einer ebenen Figur entlang, so erhält man eine nach 2 Seiten offene Säulenform, die prismatische Säule. Dieselbe erhält man auch, wenn man eine ebene Figur parallel mit sich selbst ohne Drehung so fortbewegt, daß ein Punkt derselben eine feste unbegrenzte Grade durchläuft.

§. 23. Schneidet man eine prismatische Säule, deren Erzeugungsfigur gradlinig begrenzt ist, durch 2 parallele Ebenen, so erhält man einen vollständig begrenzten Raum, das Prisma. Die Begrenzungsflächen desselben, welche der prismatischen Säule angehören, nennt man Seitenflächen; die Summe der Seitenflächen nennt man prismatische Oberfläche; die Schnittflächen nennt man Grundflächen. Die Durchschnittslinien je zweier anstoßenden Seitenflächen nennt man prismatische Kanten; die der Seitenflächen mit den Grundflächen nennt man Grundflächenkanten. Wenn die prismatischen Kanten auf den Grundflächen senkrecht stehen, so heißt das Prisma ein grades; wenn dies nicht der Fall ist, ein schiefes. Jede Seitenfläche des Prisma's ist ein Parallelogramm; im graden Prisma sind alle Seitenflächen Rechtecke; im schiefen können einzelne, aber niemals 2 anstoßende, Rechtecke sein. Jeder ebene Schnitt parallel einer prismatischen Kante ist ebenfalls ein Parallelogramm. Jeder Schnitt parallel den Grundflächen ist den Grundflächen kongruent. Ein Prisma heißt *n*-seitig, wenn seine Grundfläche ein *n*-Eck ist.

§. 24. Unter den Prismen tritt vorzugsweise dasjenige hervor, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, und zwar deshalb, weil in denselben jedes der 3 Flächenpaare als Grundflächenpaar angesehen werden kann. Es heißt Parallelepipeton. Ein Parallelepipeton, dessen sämtliche Begrenzungsfiguren Rechtecke sind, heißt rechtwinklig. Wenn sie insbesondere sämtlich Quadrate sind, so heißt es Cubus, Würfel. Dieser ist ein regelmäßiger Körper, d. h. alle seine gleichnamigen Stücke sind gleich.

§. 25. Ein Prisma heißt ein regelmäßiges, wenn seine Grundflächen regelmäßige Figuren sind. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundflächen heißt Axe; sie ist den prismatischen Kanten parallel. Der Winkel der Axe gegen die Grundfläche dient als Maas des Winkels des Prisma's gegen die Grundfläche.

§. 26. Schneidet man eine prismatische Säule, deren Erzeugungsfigur krummlinig begrenzt ist, durch 2 parallele Ebenen, so nennt man den dadurch vollständig begrenzten Raum einen Cylinder. In der Elementargeometrie versteht man unter diesem Namen nur den Cylinder, dessen Grundflächen Kreise sind. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Grundflächenkreise heißt Axe. Dieselbe ist der unendlichen Reihe grader Linien der Oberfläche parallel. Wenn die Axe senkrecht auf der Grundfläche steht, so nennt man den Cylinder einen graden, wenn nicht, einen schiefen. Einen Schnitt, welcher durch die Axe senkrecht auf die Grundfläche gelegt wird, nennt man einen Normalschnitt. — Jeder Schnitt, parallel der Grundfläche, ist ein Kreis. Im schiefen Cylinder giebt es außer diesen noch eine 2te unendliche Reihe von Kreisschnitten; es sind die, welche ebenfalls senkrecht auf dem Normalschnitte stehen, und mit der Axe denselben Winkel bilden wie die Grundfläche, aber in entgegengesetzter Lage. Denn jeder solche Schnitt, Wechselschnitt, schneidet jeden beliebigen der Grundfläche parallelen Schnitt in einer graden Linie, welche auf dem Normalschnitt senkrecht steht. Trifft der Grundflächenschnitt den Wechselschnitt innerhalb des Cylinders (und es findet dies immer für unendlich viele Grundflächenschnitte statt), so schneidet der Kreis des Grundflächenschnittes auf dieser Durchschnittslinie ein Stück ab, welches durch den Normalschnitt halbiert wird; die Hälfte desselben ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers des Grundflächenschnittes, in welchem dieser den Normalschnitt schneidet, also auch die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Linie, in welchem der Wechselschnitt den Normalschnitt schneidet, da diese Abschnitte jenen paarweise gleich sind; folglich ist der Wechselschnitt ein Kreis. — Die Cylindersfläche ist eine abwickelbare Fläche. — Ein Cylinder läßt sich als ein regelmäßiges Prisma von unendlich vielen Seiten betrachten.

b Pyramidalische Formen.

§. 27. Wenn man eine unbegrenzte grade Linie so den Umfang einer ebenen Figur entlang bewegt, daß sie immer durch einen festen Punkt geht, so erhält man ein unvollständig begrenztes räumliches Gebilde: die körperliche Ecke. (Wenn der feste Punkt in unend-

licher Entfernung liegt, so geht die Ecke in eine prismatische Säule über.)

§. 28. Schneidet man eine körperliche Ecke, deren Erzeugungsfigur gradlinig begrenzt ist, durch eine Ebene, so erhält man ein vollständig begrenztes räumliches Gebilde: die Pyramide. Die Begrenzungsflächen derselben, welche der Ecke angehören, nennt man Seitenflächen; die Summe der Seitenflächen heißt pyramidalische Oberfläche; die Schnittfläche Grundfläche. Die Durchschnittslinien je zweier anstoßenden Seitenflächen heißen pyramidalische Kanten; die der Seitenflächen mit den Grundflächen Grundflächenkanten. Jede Seitenfläche der Pyramide ist ein Dreieck; jeder ebene Schnitt durch die Spitze ebenfalls. Alle ebenen Schnitte parallel der Grundfläche sind der Grundfläche ähnlich, und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Spitze proportional.

§. 29. Unter den Pyramiden tritt besonders diejenige als bemerkenswerth hervor, deren Grundfläche ein Dreieck ist, und zwar deshalb, weil jede Begrenzungsfläche derselben als Grundfläche angesehen werden kann. Sie heißt Tetraeder. Wenn die 4 Dreiecke desselben regelmäßig sind, so ist es das regelmäßige Tetraeder, ein regelmäßiger Körper.

§. 30. Wenn die Grundfläche der Pyramide eine regelmäßige Figur ist, so heißt die Pyramide eine regelmäßige. Die Verbindungslinie des Mittelpunkts der Grundfläche mit der Spitze heißt Axe. Der Winkel der Axe gegen die Grundfläche dient als Maas des Winkels der Pyramide gegen die Grundfläche. — Die Pyramide heißt grade, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht; schief, wenn dies nicht der Fall ist.

§. 31. Schneidet man eine körperliche Ecke, deren Erzeugungsfigur krummlinig begrenzt ist, durch eine Ebene, so nennt man den dadurch vollständig begrenzten Raum einen Kegel. In der Elementargeometrie versteht man unter diesen Namen nur den Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes dieser Grundfläche mit der Spitze heißt Axe. Der Winkel der Axe gegen die Grundfläche dient als Maas des Winkels des Kegels gegen die Grundfläche. Der Kegel heißt grade, wenn die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht; schief, wenn dies nicht der Fall ist. Im schiefen Kegel heißt derjenige Schnitt, welcher durch die Axe senkrecht auf die Grundfläche gelegt wird, Normalschnitt. Die Durchschnittsfigur ist ein Dreieck. Jeder Schnitt parallel der Grundfläche ist ein Kreis. Im schiefen Kegel giebt es außer diesen noch eine 2te unendliche Reihe von Kreisschnitten; es sind die, welche ebenfalls senkrecht auf dem Normalschnitt stehen, und mit den der Kegelfläche angehörigen Seiten des Normalschnittsdreiecks dieselben Winkel bilden, wie die Grundfläche, aber so, daß die Lagen der Winkel gegen die Seiten verwechselt sind; solche Schnitte heißen Wechselschnitte. Daß für dieselben die Durchschnittsfiguren Kreise sind, ergibt sich folgendermaßen: Jeder Wechselschnitt schneidet jeden der Grundfläche parallelen Schnitt (Grundflächenschnitt) in einer graden Linie, welche auf dem Normalschnitt senkrecht steht. Trifft der Grundflächenschnitt

den Wechselschnitt innerhalb des Kegels (und es findet dies immer für unendlich viele Grundflächenschnitte statt), so schneidet der Grundflächenschnittskreis auf dieser Durchschnittslinie ein Stück ab, welches durch den Normalschnitt halbiert wird; die Hälfte desselben ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten des Durchmessers des Grundflächenschnitts, in welchem dieser den Normalschnitt schneidet, also auch die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Linie, in welcher der Wechselschnitt den Normalschnitt schneidet, da das Rechteck aus diesen Abschnitten dem Rechteck aus jenen gleich ist, wie aus der Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke hervorgeht; folglich ist die Wechselschnittsfigur ein Kreis. — Die Kegelfläche ist eine abwickelbare Fläche. — Ein Kegel läßt sich als eine regelmäßige Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachten.

§. 32. Legt man durch die Pyramide einen zweiten Schnitt parallel der Grundfläche, so nennt man das zwischen den beiden Grundflächenschnitten gelegene Stück der Pyramide eine abgekürzte Pyramide; ist insbesondere die Pyramide ein Kegel, so heißt es ein abgekürzter Kegel. (Das Prisma läßt sich als ein besonderer Fall der abgekürzten Pyramide, der Cylinder als ein besonderer Fall des abgekürzten Kegels betrachten, für welche nämlich die Spitze in unendlicher Entfernung liegt.)

B. Ausmessung der prismatischen und pyramidalischen Oberflächen.

a. Die prismatischen Oberflächen.

§. 33. Die prismatische Oberfläche eines Prismas ist gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie eine prismatische Kante, und dessen Höhe der Umfang einer Durchschnittsfigur ist, welche auf den prismatischen Kanten senkrecht steht. Die cylindrische Oberfläche eines Cylinders ist gleich einem Rechteck, dessen Grundfläche die Ase und dessen Höhe der Umfang einer Durchschnittsfigur ist, welche auf der Ase senkrecht steht. — Im graden Prisma und graden Cylinder ist die Grundfläche selbst ein solcher Schnitt. Wenn der Radius der Grundfläche des graden Cylinders mit r , die Ase mit a bezeichnet wird, so ist dessen Oberfläche $= 2ra\pi$.

b. Die pyramidalischen Oberflächen.

§. 34. Die pyramidalische Oberfläche einer unregelmäßigen Pyramide, wie auch einer schiefen regelmäßigen Pyramide läßt sich ausmessen, indem man die einzelnen Dreiecke mißt, welche dieselbe bilden, und deren Maaszahlen addirt. — Geht die Grundfläche in einen Kreis über, so wird die Anzahl der auszumessenden Dreiecke unendlich groß, jedes einzelne Dreieck unendlich klein; dadurch liegt die Aufgabe der Ausmessung über die Grenzen der Elementar-Geometrie hinaus. Die pyramidalische Oberfläche einer graden regelmäßigen Pyramide ist gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie der Umfang der Grundfläche ist, und dessen Höhe die Höhe irgend einer Seitenfläche ist.

Die Kegelfläche eines graden Kegels ist demnach $= rk\pi$, wenn man mit r den Radius der Grundfläche, und mit k die Entfernung der Spitze von irgend einem Punkte des Grundflächenkreises bezeichnet.

§. 35. Für die pyramidalische Oberfläche einer abgekürzten Pyramide gilt im Allgemeinen dasselbe, wie für die der Pyramide.

Die pyramidalische Oberfläche einer regelmäßigen graden abgekürzten Pyramide ist gleich einem Trapez, dessen Grundlinien gleich den Umfängen der beiden Grundflächen sind, und dessen Höhe gleich der Höhe einer Seitenfläche ist.

Die Kegelfläche eines graden abgekürzten Kegels ist demnach $(r+r') k\pi$, wenn mit r und r' die Radien der Grundfläche, und mit k der Durchschnitt eines durch die Are gelegten Schnittes (Arenschnittes) mit der Oberfläche bezeichnet wird.

Der letzte Ausdruck läßt sich in einen andern umformen. Man denke sich einen Arenschnitt, so enthält derselbe ein Trapez, dessen Seiten die Are oder die Höhe h , die Radien der beiden Grundflächen r und r' , und eine der Linien sind, welche oben mit k bezeichnet wurden. Verbindet man die Mitte der Are mit der Mitte der gegen-

überliegenden Seite, so ist diese Verbindungslinie $= \frac{r+r'}{2}$; errichtet

man in der Mitte der gegenüberstehenden Seite auf derselben ein Perpendikel, welches in der Vertikalebene liegt, so schneidet dieses die Are; die Länge desselben vom Fußpunkte bis zum Durchschnitts-

punkte mit der Are werde mit ρ bezeichnet, so bildet ρ mit $\frac{r+r'}{2}$ und

dem betreffenden Stück der Are ein Dreieck, welches dem von k mit der durch einen Endpunkt parallel der Are gezogenen Linie und dem betreffenden Stück des einen Radius gebildeten Dreieck ähnlich ist, so

daß $\rho : \frac{r+r'}{2} = k : h$, also $\rho h = \frac{r+r'}{2} \cdot k$, demnach die Oberfläche

$= 2 \rho h \pi$, d. h. Die Kegelfläche eines graden abgekürzten Kegels ist gleich der cylindrischen Oberfläche eines Cylinders von gleicher Höhe, dessen Grundflächendurchmesser gleich dem Perpendikel ist, welches sich in einem Arenschnitt des abgekürzten Kegels auf der der Oberfläche angehörenden Seite in der Mitte errichten läßt, wenn dasselbe bis zur Are verlängert wird.

B. Ausmessung der prismatischen und pyramidalischen Räume.

a. Die prismatischen Räume.

§. 36. Die Größe eines Prisma's in einer gegebenen prismatischen Säule ist allein abhängig von der Länge der prismatischen Kante. — Oder: Zwei Prismen, welche derselben prismatischen Säule angehören, sind gleich, wenn sie eine prismatische Kante gleich haben.

Beweis nach Plan. §. 39.

§. 37. Parallelepipeda von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Zu den 2 Parallelepipeden läßt sich nämlich leicht ein drittes finden, welches mit jedem derselben in dem Fall des §. 36. ist, so daß es beiden gleich ist, beide also einander gleich sind.

Zu dem Ende verlängere man ein Paar gegenüberstehende Grundflächenkanten derselben Grundfläche des einen Parallelepipeds, schneide an irgend einer Stelle auf der einen Verlängerung eine Linie gleich der Kante ab, welcher die Verlängerung angehört; beschreibe darüber ein Parallelogramm, dessen gegenüberstehende Seite in der 2ten Verlängerung liegt, und dessen zweites Seitenpaar gleich einer Grundflächenkante des 2ten Parallelepipeds ist; dieses Parallelogramm ist den Grundflächen beider Parallelepipeda gleich. Nun verlängere man das 2te Paar gegenüberstehender Seiten dieses Parallelogramms, so läßt sich zwischen diese beide Parallelen offenbar die Grundfläche des zweiten Parallelepipeds eintragen, und darauf das zweite Parallelepipeton aufsetzen. Die zweiten Grundflächen beider Parallelepipeda liegen dann vermöge ihrer gleichen Höhen in einer Ebene. Erweitert man diejenigen Seitenflächen der beiden Parallelepipeda, deren Grundflächenkanten durch ihre Verlängerungen das neue Parallelogramm bilden, so schließen diese 4 Ebenen mit den beiden Grundflächenebenen ein neues Parallelepipeton ein. Bedenkt man nun, daß in einem Parallelepipeton jedes Paar gegenüberstehender Flächen als Grundflächenpaar angesehen werden kann, so erkennt man, daß dieses neue Parallelepipeton mit jedem der gegebenen derselben prismatischen Säule angehört und eine prismatische Kante gleich hat, so daß es dem einen wie dem andern gleich ist.

§. 38. Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Es folgt dies aus §. 39. zunächst für dreiseitige, und daraus für beliebig vielseitige Prismen.

§. 39. Das Verhältniß zweier Prismen von gleichen Grundflächen ist gleich dem Verhältniß ihrer Höhen.

Das Verhältniß zweier Prismen von gleichen Höhen ist gleich dem Verhältniß ihrer Grundflächen.

Das Verhältniß zweier Prismen ist zusammengesetzt aus dem Verhältniß ihrer Grundflächen und dem Verhältniß ihrer Höhen; oder abgekürzt: 2 Prismen verhalten sich wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Die Maaszahl für den Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkte aus der Maaszahl der Grundfläche in die Maaszahl der Höhe, vorausgesetzt, daß man als Raumeinheit einen Würfel annimmt, dessen Kante die Längeneinheit ist, und als Flächeneinheit ein Quadrat, dessen Seite ebenfalls gleich der Längeneinheit ist. Oder abgekürzt: Ein Prisma ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Zum Beweise vergl. Plan. §. 44. 45.

Ist insbesondere das Prisma ein Würfel, dessen Kante die Maaszahl a hat, so hat der Würfel die Maaszahl a^3 .

Ist dasselbe ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Kanten a, b, c , so ist der Inhalt des Parallelepipedons $= abc$.

Ist dasselbe ein Cylinder, dessen Grundfläche den Radius r hat, und dessen Höhe h ist, so ist der Inhalt $= r^2 h \pi$.

b. Die pyramidalischen Räume.

§. 40. Eine Pyramide ist ein Drittel eines Prisma's von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Man theile die Höhe einer Pyramide in n gleiche Theile und lege durch jeden Theilpunkt einen Schnitt parallel der Grundfläche, so zerfällt dadurch die Pyramide in $n-1$ abgekürzte Pyramiden und 1 Pyramide. Setzt man auf jede der größeren Grundflächen dieser abgekürzten Pyramiden und auf die Grundfläche der einen Pyramide Prismen auf nach der Seite der kleineren Grundflächen hin, deren prismatische Kanten einer der pyramidalischen Kanten parallel sind, und deren Höhen gleich der Entfernung je zweier Parallelschnitte sind, so erhält man eine Reihe von Prismen, deren Summe größer als die gegebene Pyramide ist, derselben aber um so näher kommt, je größer n angenommen wird, und durch einen hinreichend großen Werth des n von der Pyramide um weniger verschieden sein wird, als um jede noch so kleine denkbare GröÙe (wie aus dem Folgenden hervorgeht). — Setzt man in gleicher Weise auf jede der kleineren Grundflächen nach der Seite der größeren Grundflächen hin Prismen auf, so erhält man eine Reihe von Prismen, deren Summe kleiner als die Pyramide ist, derselben ebenfalls um so näher kommt, je größer n ist, und durch einen hinreichend großen Werth des n von der Pyramide um weniger verschieden sein wird, als um jede noch so kleine denkbare GröÙe. — Nach §. 39. läßt sich die Maßzahl sowohl jener als dieser Reihe von Prismen angeben. Die Summe der ersten Reihe von Prismen ist, wenn man die Grundfläche der Pyramide mit g , die Höhe mit h bezeichnet (nach §. 39. und 28) $=$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} h \cdot g + \frac{1}{n} h \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 g + \frac{1}{n} h \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 g + \dots + \frac{1}{n} h \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 g \\ &= \frac{1}{n^3} hg \left\{ n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2 \right\} \\ &= hg \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right\} \quad \text{S. Arithmetik §. 98.} \end{aligned}$$

Die Summe der zweiten Reihe von Prismen ist:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} h \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 g + \frac{1}{n} h \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 g + \dots + \frac{1}{n} h \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 g \\ &= \frac{1}{n^3} hg \left\{ (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1^2 \right\} \\ &= hg \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right\} \quad \text{S. Arithmetik §. 98.} \end{aligned}$$

Die Maasszahl der Pyramide liegt offenbar immer zwischen diesen beiden Zahlen; beide nähern sich aber in's Unendliche der Grenze $\frac{1}{3} hg$, wenn man n über jede endliche Grenze hinaus wachsen läßt, woraus hervorgeht, daß die Maasszahl der Pyramide $= \frac{1}{3} hg$ ist.

§. 41. Anmerkung. Der Satz des §. 40. läßt sich auch in folgender Weise ableiten: Zunächst folgt aus einer mit der vorigen auf gleicher Grundlage beruhenden Betrachtung, daß Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen einander gleich sind. Ferner läßt sich jedes dreiseitige Prisma in 3 einander gleiche dreiseitige Pyramiden zerschneiden, von welchen 2 mit dem Prisma gleiche Grundflächen haben; daraus folgt, daß jede dreiseitige Pyramide ein Drittel eines dreiseitigen Prismas von gleicher Grundfläche ist, und daraus ergiebt sich dann auch der Satz des §. 41. allgemein.

§. 42. Der Inhalt eines Kegels hat die Maasszahl $\frac{1}{3} hr^2\pi$, wenn man mit h die Höhe, und mit r den Radius der Grundfläche bezeichnet.

§. 43. Eine abgekürzte Pyramide ist gleich der Summe dreier Pyramiden von der Höhe der abgekürzten Pyramide, deren Grundflächen resp. die beiden Grundflächen der abgekürzten Pyramide und die mittlere Proportionale zwischen beiden sind.

Denn man bezeichne die beiden Grundflächen mit G und g , die Höhe mit h , und die Höhe der Pyramide, welche die abgekürzte Pyramide zu einer Pyramide ergänzen würde, mit k , so ist der Inhalt

der abgekürzten Pyramide $= \frac{1}{3} (h+k) G - \frac{1}{3} kg$. Die Höhe k ist aber vollständig bestimmt durch §. 28, und diese Abhängigkeit wird dargestellt durch die Gleichung.

$$\frac{k^2}{(h+k)^2} = \frac{g}{G}$$

Wird diese Gleichung in Bezug auf k aufgelöst, so erhält man

$$k = \frac{h(g \pm \sqrt{Gg})}{G-g}$$

Wenn G die größere der beiden Grundflächen bezeichnet, so ist nur die eine Wurzel mit dem Vorzeichen $+$ von Bedeutung. Setzt man diesen Ausdruck für k in die obige Maasszahl des Inhaltes ein, so nimmt dieselbe die Form an

$$\frac{1}{3} h (G+g+\sqrt{Gg})$$

§. 44. Ist die abgekürzte Pyramide ein abgekürzter Kegel, und bezeichnet man die Radien der Grundfläche mit R und r , die Höhe mit h , so geht der Ausdruck des §. 43. über in

$$\frac{1}{3} h (R^2 + r^2 + Rr) \pi$$

ein Ausdruck, dem sich durch eine leichte Umformung die in Forstrechnungen gebräuchliche Form

$$h \left\{ (R+r)^2 + \frac{1}{3} (R-r)^2 \right\} \frac{\pi}{4}$$

geben läßt.

§. 44. Ist die abgestumpfte Pyramide ein abgestumpfter Kegel, und bezeichnet man die Abstände der Grundflächen mit R und r , die Höhe mit h , so geht der Ausdruck des §. 43. über in

$$\frac{1}{3} h (R^2 + r^2 + Rr) \pi$$

ein Ausdruck, dem sich durch eine leichte Umformung die in §. 43. gegebene allgemeine Form

$$h \left\{ \frac{\pi}{4} (R+r)^2 - \frac{1}{8} \pi (R-r)^2 \right\}$$

Drittes Capitel.

Die Kugel.

a. Die Kugeloberfläche.

§. 45. Die Oberfläche einer Kugel ist 4mal so groß, als die Fläche eines Hauptkreises derselben; sie ist $= 4r^2\pi$, wenn man ihren Radius mit r bezeichnet.

Denn eine Kugel entsteht durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen Begrenzungsdurchmesser. Ein Halbkreis läßt sich nach Plan. §. 77. 2. als die Grenze der Hälfte eines regelmäßigen $2n$ -Ecks ansehen, dessen Seitenzahl $2n$ über jede Grenze hinaus wächst; die Kugel also läßt sich als die Grenze der Summe von n abgestumpften Kegeln ansehen. Die Oberfläche eines abgestumpften Kegels ist $= 2\rho h\pi$ (§. 35). Dieses ρ ist bei allen den abgestumpften Kegeln, deren Summe die Kugel bildet, $= r$; folglich ist die Oberfläche der Kugel $= 2r\pi \cdot S(h)$, wo unter $S(h)$ die Summe der Höhen verstanden wird; diese ist aber $= 2r$, also die Oberfläche $= 4r^2\pi$.

§. 46. Der Inhalt eines sphärischen Zweiecks ist $= \frac{\phi}{360} \cdot 4r^2\pi = \frac{\phi}{90} r^2\pi$, wenn man mit ϕ die Anzahl der Grade des sphärischen Winkels des sphärischen Zweiecks bezeichnet.

§. 47. Der Inhalt eines sphärischen Dreiecks ist vollständig bestimmt durch die Summe seiner 3 Winkel, und zwar ist er $= \frac{S-180}{180} r^2\pi$, wenn man mit S die Anzahl der Grade der Winkelsumme bezeichnet.

Denn es seien $\alpha \beta \gamma$ die 3 Winkel des Dreiecks, so bildet das Dreieck mit seinen 3 Nebenecken 3 Zweiecke, deren Oberflächen resp. die Maßzahlen

$$\frac{\alpha}{90} r^2\pi \quad \frac{\beta}{90} r^2\pi \quad \frac{\gamma}{90} r^2\pi$$

haben.

Setzt man an die Stelle eines der Nebendreiecke sein Gegendreieck, welches ihm symmetrisch, also auch an Inhalt gleich ist, so erkennt man, daß die Summe jener 3 Zweiecke gleich der Oberfläche derselben Kugel + dem doppelten gegebenen Dreiecke ist; bezeichnet man also dieses mit Δ , so ist

$$2\Delta + 2r^2\pi = \frac{S}{90} r^2\pi$$

$$\Delta = \frac{S-180}{180} r^2\pi$$

§. 48. Folgerung. Für das sphärische n -Eck, dessen Winkelsumme S ist, ergibt sich hieraus, daß der Inhalt desselben $= \frac{S-(n-2)180}{180} r^2\pi$ ist. Die Differenz $S - (n-2)180$ nennt man

„den sphärischen Exceß.“

Anm. Es giebt für das sphärische Dreieck einen Satz, welcher dem planimetrischen entspricht, daß der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks von gegebener Grundlinie und gegebenen Inhalte eine der gegebenen Grundlinie parallele grade Linie ist. Dieser Satz findet sich in Grelle's Journal Bd. 2. in einer Abhandlung von Steiner, in welcher viele wichtige Sätze über Verwandlung und Theilung enthalten sind.

§. 49. Ein Kugelstück, welches von einer Kugel durch eine Ebene abgeschnitten wird, heißt Calotte. Die Entfernung des Poles der Calotte von der schneidenden Ebene heißt Höhe der Calotte.

Die Maßzahl der sphärischen Oberfläche einer Calotte ist $2hr\pi$, wenn h die Höhe derselben bezeichnet. — Folgt ebenso wie §. 45. Demnach ist die sphärische Oberfläche einer Calotte gleich einer Kreisfläche, deren Radius gleich der Entfernung des Poles der Calotte von dem Umfange des sie begrenzenden Nebenkreises ist.

b. Der Inhalt der Kugel.

§. 50. Der Inhalt einer Kugel ist $= \frac{4}{3} r^3\pi$. Denn

eine Kugel ist so groß wie eine Pyramide, deren Grundfläche die Kugeloberfläche, und deren Höhe der Radius ist.

Anmerkung. Diese Maßzahl läßt sich auch durch ein Verfahren finden, welches dem des §. 40. analog ist. — Man denke sich eine Halbkugel und in derselben den auf dem Begrenzungs-Hauptkreise senkrechten Radius in n gleiche Theile getheilt, und durch die Theilpunkte Ebenen gelegt, so theilt diese die Halbkugel in n Theile: einer derselben ist eine Calotte; die $n-1$ übrigen werden von 2 parallelen Ebenen und einem sphärischen Ringe begrenzt. Denkt man sich auf jeden der Begrenzungskreise jedesmal nach der Seite der kleineren Kreise hin einen graden Cylinder aufgesetzt, dessen Höhe gleich der Entfernung je zweier auf einander folgender parallelen Ebenen ist, so erhält man eine Reihe von Cylindern, deren Summe größer ist, als die Halbkugel derselben um so näher kommt, je größer n angenommen wird, und durch hinreichend große Werthe des n um weniger von derselben verschieden gemacht werden kann, als um jede noch so kleine denkbare Größe. Denkt man sich dagegen auf jeden der Begrenzungs-

kreise jedesmal nach der Seite der größeren Kreise hin einen graden Cylinder aufgesetzt, dessen Höhe gleich der Entfernung je zweier auf einander folgenden parallelen Ebenen ist, so erhält man eine Reihe von Cylindern, deren Summe kleiner als die Halbkugel ist, derselben um so näher kommt, je größer n angenommen wird, und durch hinreichend große Werthe des n um weniger von derselben verschieden gemacht werden kann, als um jede noch so kleine denkbare Größe.

Die Maaßzahl der Summe der ersten Cylinderreihe ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} r \cdot r^2 \pi + \frac{1}{n} r \cdot \left\{ r^2 - \left(\frac{1}{n} r \right)^2 \right\} \pi + \frac{1}{n} r \cdot \left\{ r^2 - \left(\frac{2}{n} r \right)^2 \right\} \pi + \dots \\ & + \frac{1}{n} r \cdot \left\{ r^2 - \left(\frac{n-1}{n} r \right)^2 \right\} \pi \\ & = r^3 \pi \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \left(\frac{3}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right] \right\} \\ & = r^3 \pi \left\{ 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] \right\} \\ & = r^3 \pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \right\} \quad \text{S. Arithmetik §. 92.} \end{aligned}$$

Die Maaßzahl der Summe der zweiten Cylinderreihe ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} r \cdot \left\{ r^2 - \left(\frac{1}{n} r \right)^2 \right\} \pi + \frac{1}{n} r \cdot \left\{ r^2 - \left(\frac{2}{n} r \right)^2 \right\} \pi + \dots \\ & + \frac{1}{n} r \cdot \left\{ r^2 - \left(\frac{n-1}{n} r \right)^2 \right\} \pi \\ & = r^3 \pi \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 + 1 \right] \right\} \\ & = r^3 \pi \left\{ 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] \right\} \\ & = r^3 \pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Die Maaßzahl der Halbkugel liegt zwischen beiden Zahlen. Jede derselben nähert sich bei unbegrenztem Wachsen des n der Zahl $\frac{2}{3} r^3 \pi$ ins Unendliche; dies ist also die Maaßzahl der Halbkugel; die Maaßzahl der ganzen Kugel ist also $\frac{4}{3} r^3 \pi$.

§. 51. Dasjenige Kugelstück, welches begrenzt wird von den Ebenen zweier Hauptkreise und einem zwischliegenden Zweieck heißt ein Kugelsektor.

Ist die Anzahl der Grade des sphärischen Zweiecks $= \phi$, so ist der Inhalt des Kugelsektors $= \frac{\phi}{360} \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{\phi}{270} r^3 \pi$.

§. 52. Dasjenige Kugelftück, welches einerseits begrenzt wird von der sphärischen Oberfläche einer Calotte (eines Kugelsegments), andererseits von einem Kegelmantel, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, und welche durch den Begrenzungskreis der Calotte gelegt ist, heißt ein Kugelfegel.

Ein Kugelfegel ist gleich einer Pyramide, deren Grundfläche gleich der sphärischen Oberfläche der Calotte ist, und deren Höhe gleich dem Radius der Kugel ist. Der Inhalt des Kugelfegels hat demnach die Maßzahl $\frac{2}{3} hr^2\pi$ (§. 49), wo h die Höhe der Calotte bezeichnet.

§. 53. Der körperliche Inhalt einer Calotte wird gefunden, wenn man von dem zu derselben gehörenden Kugelfegel den Kegel subtrahirt, welcher den schneidenden Nebenkreis zur Grundfläche und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat, falls $h < r$; oder wenn man zu dem zu derselben gehörenden Kugelfegel den Kegel addirt, welcher den schneidenden Nebenkreis zur Grundfläche und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat, falls $h > r$ ist. Im einen wie im andern Falle erkennt man leicht, daß die Maßzahl der Calotte gleich

$$\frac{2}{3} hr^2\pi - \frac{1}{3} h(2r-h)(r-h)\pi$$

ist, da der Radius des Nebenkreises die mittlere Proportionale ist zwischen h und $2r-h$. Dieser Zahl läßt sich aber sogleich folgende Form geben.

$$h^2 \left(r - \frac{1}{3} h \right) \pi$$

Anm. Dieselbe Zahl läßt sich auch auf dem in §. 50. Anm. befolgten Wege ohne Voraussetzung der Maßzahl des Kugelfegels finden.

Viertes Capitel.

Von den regelmäßigen Körpern.

§. 54. Unter allen Körpern ist offenbar die Kugel der regelmäßigste. Von ihr soll jedoch hier nicht die Rede sein, sondern von solchen regelmäßigen Körpern, die von ebenen Flächen begrenzt sind. Unter dieser Voraussetzung versteht man unter einem regelmäßigen Körper ein Polyeder, dessen sämtliche Kantenwinkel einander gleich sind, dessen sämtliche Flächenwinkel einander gleich sind, dessen sämtliche Kanten einander gleich sind.

Aus diesen Bedingungen ergibt sich sogleich als Folgerung, daß an jedem solchen regelmäßigen Körper die Begrenzungsfiguren gleichvielseitige reguläre, und also kongruente Figuren sind, daß alle Ecken gleichvielseitig, regelmäßig und kongruent sind; kurz, daß alle gleichnamigen Stücke einander gleich sind. (Vgl. §. 27, §. 29.)

§. 55. Nach §. 22. 8. kann es keinen regelmäßigen Körper geben, dessen Begrenzungsfiguren mehr als 5 Seiten hätten. Es sind also nur solche regelmäßige Körper denkbar, welche von regelmäßigen Dreiecken, Vierecken oder Fünfecken begrenzt werden. Nach §. 17. können die Ecken eines regelmäßigen Körpers, welcher von regelmäßigen Dreiecken begrenzt wird, nicht mehr als 5 Kanten haben; es sind also nur solche von Dreiecken begrenzte regelmäßige Körper denkbar, deren Ecken dreiseitig oder vierseitig oder fünfseitig sind; es sind ferner aus demselben Grunde nur solche von Vierecken begrenzte regelmäßige Körper denkbar, deren Ecken dreiseitig sind; ebenso nur solche von Fünfecken umschlossene regelmäßige Körper, deren Ecken dreiseitig sind.

Diese 5 Gruppen bis dahin nicht als unmöglich nachgewiesener regelmäßiger Körper existiren wirklich, wie jetzt nachzuweisen ist, aber jede derselben hat nur einen Repräsentanten, d. h. alle regelmäßigen Körper derselben Gruppe sind einander ähnlich.

§. 56. Schneidet man auf den Kanten einer regelmäßigen Ecke (§. 12. 7.) von der Spitze aus gleiche Stücke ab, so liegen die Endpunkte sämtlich in einer Ebene, und die Durchschnittsfigur ist eine regelmäßige Figur, deren Seitenzahl der Seitenzahl der Ecke gleich ist.

Denn es seien $\alpha \beta \gamma \delta$ 4 solche in 4 aufeinander folgenden Kanten der Ecke liegende Punkte; man denke sich durch $\alpha \beta \gamma$ und durch $\beta \gamma \delta$ die dadurch bestimmten Ebenen gelegt, so erkennt man sogleich, daß die an den Punkten β und γ liegenden Ecken zugleich kongruent und symmetrisch sind, woraus hervorgeht, daß beide Ebenen gegen dieselbe Seitenfläche der Ecke gleiche Neigung haben, daß sie folglich identisch sind.

Erste Klasse.

Die von Dreiecken begrenzten regelmäßigen Körper.

§. 57. Die Ecken sollen dreiseitig sein: das Tetraeder. Schneidet man auf den Kanten einer regelmäßigen dreiseitigen Ecke, deren Kantenwinkel $= 60^\circ$ sind, und welche dadurch vollständig bestimmt ist, von der Spitze aus 3 gleiche Stücke ab, und legt durch die 3 Endpunkte eine Ebene, so entsteht offenbar ein regelmäßiger 4flächiger Körper, das regelmäßige Tetraeder. Zugleich ist klar, daß jeder von dreiseitigen Ecken und Dreiecken begrenzte regelmäßige Körper dem so entstandenen ähnlich ist.

Das regelmäßige Tetraeder ist von 4 gleichseitigen Dreiecken, 4 gleichseitigen dreiseitigen Ecken und 6 gleichen Kanten begrenzt.

§. 58. Die Ecken sollen vierseitig sein: das Oktaeder. Denkt man sich eine regelmäßige vierseitige Ecke, deren Kantenwinkel $= 60^\circ$ sind, und auf den 4 Kanten derselben von der Spitze aus gleiche Stücke abgeschnitten, und durch die Eckpunkte eine Ebene gelegt, so erhält man eine regelmäßige grade Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat ist, und deren Höhe gleich der halben Diagonale der Grundfläche ist. Umgekehrt kann man demnach eine solche Pyramide erhalten, indem man im Mittelpunkte eines Quadrates auf der Ebene desselben ein Perpendikel errichtet, dasselbe gleich der halben Diagonale macht, und durch den Endpunkt und die 4 Quadratseiten Ebenen legt. Die 4 Ecken an der Grundfläche sind dreiseitig, und so beschaffen, daß man an jede derselben eine der gegebenen Pyramide kongruente mit der Spitze so anlegen kann, daß 2 Seitenflächenpaare deckend auf einander fallen; die 4 so angelegten Pyramiden stoßen zu einer Ecke zusammen, welche der Ecke an der Spitze ebenfalls kongruent ist; sie umschließen also zusammen einen regelmäßigen Körper: das regelmäßige Oktaeder.

Zugleich erkennt man, daß alle von vierseitigen Ecken begrenzten regelmäßigen Körper einander ähnlich sind, indem alle auf dasselbe Bildungsgesetz zurückgeführt werden können.

Das regelmäßige Oktaeder ist begrenzt von 8 gleichseitigen Dreiecken, 6 vierseitigen regelmäßigen Ecken und 12 gleichen Kanten. Die Kanten schließen sich in 3 Gruppen von je 4 zu Quadraten zusammen, deren Ebenen das Oktaeder halbiren.

§. 59. Die Ecken sollen fünfseitig sein: das Ikosaeder. Denkt man sich eine regelmäßige fünfseitige Ecke, deren Kantenwinkel sämtlich 60° betragen, schneidet auf den Kanten derselben

von der Spitze aus gleiche Stücke ab, und legt durch die Endpunkte eine Ebene (§. 56.), so erhält man eine regelmäßige grade fünfseitige Pyramide, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Umgekehrt erhält man eine solche Pyramide, wenn man auf einem regelmäßigen Fünfeck eine grade Pyramide aufsetzt, deren Höhe gleich einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Hypothenuse der Fünfecksseite, und dessen andere Kathete dem Radius des dem Fünfeck umschriebenen Kreises gleich ist. Die Ecken an der Grundfläche der Pyramide sind dreiseitig, und so beschaffen, daß sich an jede derselben eine der gegebenen Pyramide kongruente mit der Spitze anlegen läßt, so daß 2 Seitenflächenpaare einander decken. Durch die Seitenflächen dieser 3 Pyramiden kommen zu den vorhandenen 5 Seitenflächen 10 neue hinzu, welche in 2 Gruppen von je 5 zerfallen. Die der ersten Gruppe sind auf die Grundflächenkanten, die der zweiten auf die Grundflächenenecken der gegebenen Pyramide aufgesetzt. In diesen letzten sind die gegenüberliegenden Seiten sämtlich der Grundfläche der gegebenen Pyramide parallel, da jede derselben 2 Punkte enthält, welche gleich weit von der Grundfläche entfernt sind; sie liegen demnach auch sämtlich in einer Ebene und bilden ein regelmäßiges Fünfeck, welches der Grundfläche der Pyramide parallel ist. An jeder Ecke desselben liegt eine vierseitige Ecke, so beschaffen, daß sich an jede derselben eine der gegebenen Pyramide kongruente mit der Spitze anlegen läßt, so daß 3 Seitenflächenpaare einander decken. Die 5 so angelegten Pyramiden stoßen in 1 Punkte zusammen, und bilden daselbst eine Ecke, welche der gegebenen Ecke ebenfalls kongruent ist; ihre Seitenflächen umschließen mit den früheren zusammen einen regelmäßigen Körper: das regelmäßige Ikosaeder. — Zugleich erkennt man, daß alle von 5seitigen Ecken begrenzten regelmäßigen Körper einander ähnlich sind, indem alle auf dasselbe Bildungsgesetz zurückgeführt werden können.

Das regelmäßige Ikosaeder ist begrenzt von 20 gleichseitigen Dreiecken, 12 fünfseitigen regelmäßigen Ecken und 30 gleichen Kanten. Die 30 Kanten schließen sich in 12 Gruppen von je 5 zu kongruenten regelmäßigen Fünfecken zusammen, so daß jede Kante 2 solchen Fünfecken angehört; paarweise sind die Ebenen dieser Fünfecke parallel.

Zweite Klasse.

Die von dreiseitigen Ecken begrenzten regelmäßigen Körper.

§. 60. Die Flächen sollen Dreiecke sein: das Tetraeder, s. §. 57. Man kann dasselbe auch so erzeugt denken, daß man von einem gleichseitigen Dreieck ausgeht, und in jedem Eckpunkte desselben eine regelmäßige dreiseitige Ecke konstruirt, deren Kantenwinkel gleich dem Winkel des gleichseitigen Dreiecks sind, und deren einer Kantenwinkel mit dem Winkel des gleichseitigen Dreiecks zusammenfällt.

§. 61. Die Flächen sollen Vierecke sein: das Heraeder. Man denke sich ein Quadrat, setze auf dasselbe ein grades Prisma auf, dessen Höhe gleich der Quadratseite ist, so ist dasselbe ein regelmäßiger Körper: das regelmäßige Heraeder. Zergliedert man diese Konstruktion in einer Weise, wie sie am deutlichsten in §. 62. hervortritt, so erkennt man leicht, daß alle von Vierecken begrenzten regelmäßigen Körper einander ähnlich sind, indem alle auf dasselbe Bildungsgesetz zurückgeführt werden können.

Das regelmäßige Heraeder ist begrenzt von 6 Quadraten, 8 regelmäßigen dreiseitigen Ecken und 12 gleichen Kanten. Die 8 Ecken schließen sich in 8 Gruppen zu 8 gleichseitigen Dreiecken zusammen, so daß jede Ecke 3 solchen Dreiecken angehört, deren Seiten Diagonalen der Begrenzungsflächen des Heraeders sind. Die Seitenflächen sind paarweise, die Kanten zu je 4 einander parallel.

§. 62. Die Flächen sollen Fünfecke sein: das Dodekaeder. Man denke sich ein regelmäßiges Fünfeck, konstruiere an jedem Eckpunkte desselben eine regelmäßige dreiseitige Ecke, deren Kantenwinkel gleich dem Winkel des Fünfecks sind, und deren einer Kantenwinkel mit dem Winkel des Fünfecks zusammenfällt; so haben je 2 auf einander folgende Ecken 2 Seitenflächen und 1 Kante gemein; die 1 Seitenfläche ist allen 5 Ecken gemein. Durch jede Seite des Fünfecks ist dadurch eine neue Ebene gelegt, in welcher der Anfang zu einem neuen regelmäßigen Fünfeck besteht; man vollende dieses in jeder der 5 Ebenen, so hat man eine Verbindung von 6 Fünfecken, deren 30 Eckpunkte in 15 Punkte zusammenfallen, indem 5 Punkte je 3 Fünfecken, 5 Punkte je 2 Fünfecken angehören, und 5 Punkte Einzelpunkte sind. Die 5 Punkte der zweiten Gruppe sowohl wie die 5 Punkte der dritten Gruppe sind gleich weit von der Ebene des gegebenen Fünfecks entfernt; jene sowohl wie diese liegen also in je einer Ebene, und bestimmen je ein regelmäßiges Fünfeck. Für die 5 Punkte der zweiten Gruppe geht dies daraus hervor, daß die Seiten als entsprechende Diagonalen kongruenter Fünfecke einander gleich, auch die Winkel gleich sind, weil die Seiten den Seiten des gegebenen Fünfecks paarweise parallel sind. Für die 5 Punkte der dritten Gruppe ergiebt es sich daraus, daß die Seiten gleich sind als die Grundlinien kongruenter gleichschenkliger Dreiecke, ferner daß die Winkel gleich sind, weil die Punkte gleich weit von dem Mittelpunkt des gegebenen Fünfecks entfernt sind, mithin in der Peripherie eines Kreises liegen. — Legt man in jedem der 5 Punkte der zweiten Gruppe durch die beiden nicht demselben Fünfeck angehörenden Fünfecksseiten Ebenen, so erhält man in jedem dieser Punkte eine den 5 ersten Ecken kongruente regelmäßige dreiseitige Ecke; je 2 auf einander folgende derselben schneiden sich in einer Kante, welche durch je einen Punkt der dritten Gruppe geht. Dadurch entsteht an jedem Punkte der dritten Gruppe ebenfalls eine dreiseitige Ecke, welche den bisherigen kongruent ist. In jeder der 5 Ebenen ist der Anfang zur Bildung eines regelmäßigen Fünfecks gemacht; man vollende dasselbe; von jedem der 5 zu vollendenden Fünfecke sind schon 3 Eckpunkte

vorhanden; die 10 übrigen fallen in 5 zusammen, welche in 1 Ebene liegen; denn die 5 Verbindungslinien je zweier auf einander folgenden sind den Seiten des Fünfecks parallel, welche aus den Punkten der dritten Gruppe gebildet sind; sie bilden demnach ein regelmäßiges Fünfeck; dasselbe ist dem gegebenen Fünfecke kongruent; die Ebene desselben bildet an jedem Eckpunkte mit den betreffenden 2 andern Ebenen regelmäßige dreiseitige Ecken, welche den übrigen dreiseitigen Ecken kongruent sind; sie schließt also einen regelmäßigen Körper: das regelmäßige Dodekaeder. — Zugleich erkennt man, daß alle von Fünfecken begrenzten regelmäßigen Körper einander ähnlich sind, indem alle auf dasselbe Bildungsgesetz zurückgeführt werden können.

Das regelmäßige Dodekaeder ist begrenzt von 12 regelmäßigen Fünfecken, 20 regelmäßigen dreiseitigen Ecken, und 30 gleichen Kanten. Die 20 Ecken schließen sich zu eben so vielen gleichseitigen Dreiecken zusammen, deren Seiten Diagonalen der Begrenzungsflächen sind; jede Ecke gehört 3 solchen Dreiecken an; ferner zu 12 regelmäßigen Fünfecken, deren Seiten ebenfalls Diagonalen der Begrenzungsfiguren sind; jede Ecke gehört 3 solchen Fünfecken an. Die Begrenzungsflächen sowohl wie die Kanten sind paarweise parallel.

§. 63. In den vorigen §§. sind die allgemeinsten Formeigenschaften der regelmäßigen Körper angegeben; die Entwicklung der wichtigsten Größenbeziehungen derselben ist eine sehr angemessene Anwendung der sphärischen Trigonometrie. Auf rein geometrischem Wege lassen sich einige derselben, so wie noch eine Reihe von Formeigenschaften ableiten. Hier möge die Andeutung der folgenden genügen.

1. In jedem regelmäßigen Körper giebt es einen Punkt, welcher von allen Eckpunkten, und einen, welcher von allen Begrenzungsflächen gleich weit entfernt ist; beide fallen in einen Punkt zusammen. Jedem regelmäßigen Körper läßt sich demnach sowohl eine Kugel umschreiben als eine Kugel einschreiben. Der Mittelpunkt der eingeschriebenen und der umschriebenen Kugel ist für jeden der letzten 4 Körper ein wirklicher Mittelpunkt, d. h. jede durch ihn gelegte und von dem Umfange des Körpers begrenzte Linie wird durch ihn in 2 gleiche Theile getheilt; und er ist der Mittelpunkt jeder Durchschnitsfigur einer durch ihre gelegten Ebene mit dem Umfange des Körpers. — Auch beim regelmäßigen Tetraeder nennt man den in Rede stehenden Punkt gewöhnlich Mittelpunkt des Körpers.

2. Wenn man den Mittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders mit den Ecken desselben verbindet, und in den Ecken auf den Verbindungslinien senkrechte Ebenen errichtet, so umschließen diese ein regelmäßiges Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder. Und umgekehrt: Wenn man vom Mittelpunkte eines regelmäßigen Tetraeders, Hexaeders, Dodekaeders auf die Begrenzungsflächen Perpendikel fällt, so sind die Fußpunkte die Eckpunkte eines regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders.

Ferner: Wenn man vom Mittelpunkte eines regelmäßigen Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders auf die Begrenzungsflächen Perpendikel fällt, so sind die Fußpunkte die Eckpunkte eines regelmäßigen Tetraeders, Hexaeders, Dodekaeders. Und umgekehrt: Wenn man den Mittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders, Hexaeders, Dodekaeders mit den Eckpunkten verbindet, und in den Ecken auf den Verbindungslinien senkrechte Ebenen errichtet, so begrenzen diese Ebenen ein regelmäßiges Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder.

Dritte Abtheilung.

Die Trigonometrie.

Die Trigonometrie.

Dritte Abtheilung.

Die Trigonometrie.

Erstes Capitel.

Die trigonometrischen Funktionen.

§. 1. Erklärung der trigonometrischen Funktionen Fig. 1.

1. Wenn man von 2 Punkten einer Ebene A Perpendikel auf eine Linie B fällt, so sagt man: das von den beiden Punkten begrenzte Stück a der Linie A ist auf die Linie B projicirt. Man nennt die Linie B die Projektionsaxe; das von den Endpunkten begrenzte Stück b derselben nennt man die Projektion von a , die beiden Perpendikel a und d nennt man die projicirenden Linien.

Das Verhältnis der Projektion zur projicirten Linie ist eine Größe, welche nur von dem Winkel abhängt, welchen die Ebenen A und B mit einander bilden, und von der Länge a der projicirten Linie ganz unabhängig ist. Dieses Verhältnis ist also eine Funktion des Winkels der beiden Ebenen A und B; man nennt $\cos$ den Cosinus dieses Winkels. Bezeichnet man den Winkel mit α , so bezeichnet man seinen Cosinus mit $\cos \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

Insbesondere ist nach dem ersten Theile in jeder Seite der Projektion der Hypotenuse. Der Cosinus eines rechten Winkels ist

Druck der K. Hof- und
Landesbibliothek in
München

Die Monarchie in
der Gegenwart

Die Trigonometrie.

Die Aufgabe der Trigonometrie ist die Betrachtung einer Klasse von Linienv Verhältnissen, welche von Winkeln abhängig sind, und welche danach Winkelfunktionen, auch Kreisfunktionen oder trigonometrische Funktionen heißen, und deren Anwendung auf ebene und räumliche Figuren.

Erstes Capitel.

Die trigonometrischen Funktionen.

§. 1. Erklärung der trigonometrischen Funktionen. Fig. 1.

1. Wenn man von 2 Punkten einer Linie A Perpendikel auf eine Linie B fällt, so sagt man: das von den beiden Punkten begrenzte Stück a der Linie A ist auf die Linie B projicirt. Man nennt die Linie B die Projektionsaxe; das von den Fußpunkten begrenzte Stück b derselben nennt man die Projektion von a, die beiden Perpendikel c und d nennt man die projicirenden Linien.

Das Verhältniß der Projection zur projicirten Linie ist eine Größe, welche nur von dem Winkel abhängt, welchen die Linien A und B mit einander bilden, und von der Länge a der projicirten Linie ganz unabhängig ist. Dieses Verhältniß ist also eine Funktion des Winkels der beiden Linien A und B; man nennt sie den Cosinus dieses Winkels. Bezeichnet man den Winkel mit α , so bezeichnet man seinen Cosinus mit $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

Insbondre im rechtwinkligen Dreieck ist jede Kathete eine Projektion der Hypotenuse. Der Cosinus eines spitzen Winkels in

einem rechtwinkligen Dreieck ist also das Verhältniß der anliegenden Kathete zur Hypotenuse.

2. Das Verhältniß der Differenz der projicirenden Linien zur projecirten Linie ist ebenso nur von dem Winkel der Linien A und B abhängig. Man nennt diese Funktion des Winkels α den Sinus desselben, und bezeichnet sie mit $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{c - d}{a}$$

Insbefondre im rechtwinkligen Dreieck ist demnach der Sinus eines spitzen Winkels das Verhältniß der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse.

3. Das Verhältniß des Sinus zum Cosinus eines Winkels α nennt man die Tangente dieses Winkels, und bezeichnet diese Funktion mit $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Insbefondre im rechtwinkligen Dreieck ist demnach die Tangente eines spitzen Winkels das Verhältniß der gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden.

4. Den umgekehrten Werth der Tangente eines Winkels α nennt man die Cotangente dieses Winkels, und bezeichnet diese Funktion mit $\operatorname{cotg} \alpha$.

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Insbefondre im rechtwinkligen Dreieck ist demnach die Cotangente eines spitzen Winkels das Verhältniß der anliegenden Kathete zur gegenüberliegenden.

5. Den umgekehrten Werth des Cosinus eines Winkels α nennt man die Sekante dieses Winkels, und bezeichnet diese Funktion mit $\sec \alpha$.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Insbefondere im rechtwinkligen Dreieck ist demnach die Sekante eines spitzen Winkels das Verhältniß der Hypotenuse zur anliegenden Kathete.

6. Den umgekehrten Werth des Sinus eines Winkels α nennt man die Cosekante dieses Winkels und bezeichnet diese Funktion mit $\operatorname{cosec} \alpha$.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Insbefondere im rechtwinkligen Dreieck ist demnach die Cosekante eines spitzen Winkels das Verhältniß der Hypotenuse zur gegenüberliegenden Kathete.

7. Die Differenz $1 - \cos \alpha$ nennt man den Sinus versus des Winkels α , und bezeichnet diese Funktion mit $\sin \operatorname{vers} \alpha$.

8. Die Differenz $1 - \sin \alpha$ nennt man den Cosinus versus des Winkels α , und bezeichnet diese Funktion mit $\cos \operatorname{vers} \alpha$.

Anm. Von den erklärten 8 Funktionen werden wir die beiden

letzten gar nicht weiter in Betracht ziehen; die beiden vorhergehenden nur in Bezug auf eine erste Reihe von Eigenschaften. Die Entstehung und Bedeutung der Namen wird geeigneten Ortes erklärt werden. —

In Zukunft wird der Sinus immer dem Cosinus vorangestellt werden.

§. 2. Allgemeine Betrachtung der Veränderlichkeit der Functionen eines veränderlichen Winkels.

Man denke sich einen Winkel, dessen einer Schenkel fest, dessen anderer um den Scheitelpunkt drehbar ist; nenne jenen den Anfangsschenkel, diesen den Endschenkel. In Fig. 2. sei oa der Anfangsschenkel; oe_1, oe_2, oe_3, oe_4 seien verschiedene Lagen des Endschenkels eines veränderlichen Winkels. Man projicire in jeder Lage ein Stück des Endschenkels auf den Anfangsschenkel; wähle um der Einfachheit der Construction und der Vergleichung willen als den einen Endpunkt der projecirten Linie den Scheitelpunkt o , als zweiten Endpunkt einen in unveränderlicher Entfernung davon liegenden Punkt e , welcher also bei der Drehung des Endschenkels einen Kreis durchlaufen wird, der den Anfangsschenkel im Punkte a schneidet.

Wenn der Winkel spitz ist, der Endschenkel also im 1sten Quadranten liegt, so nennt man ihn oft „einen Winkel im 1sten Quadranten;“ wenn der Winkel stumpf ist, der Endschenkel also im 2ten Quadranten liegt, so nennt man ihn oft „einen Winkel im 2ten Quadranten“ u. s. w.

1. Wenn man den Endschenkel vom Anfangsschenkel ausgehend sich links herum bis in seine anfängliche Lage drehen läßt, so wächst der Sinus im 1sten Quadranten von 0 bis 1, nimmt im 2ten Quadranten von 1 bis 0 ab, wächst im 3ten Quadranten von 0 bis 1, und nimmt im 4ten Quadranten von 1 bis 0 ab. Ueberdies hat der Zähler des Sinusverhältnisses im 3ten und 4ten Quadranten eine Lage gegen den Anfangsschenkel, welche der im 1sten und 2ten Quadranten grade entgegengesetzt ist. Diesem Gegensatz der Lage der Linien entspricht vollkommen der algebraische Gegensatz der Zeichen. Man betrachtet demnach den Sinus im 1sten und 2ten Quadranten als positiv, im 3ten und 4ten als negativ. Für die Grenzen finden folgende Beziehungen statt.

$$\sin 0 = 0; \sin \frac{\pi}{2} = +1; \sin \pi = \pm 0; \sin \frac{3\pi}{2} = -1; \sin 2\pi = 0$$

Anm. In der älteren Trigonometrie war die Fundamentalwinkelfunction das Verhältniß der zu dem als Centriwinkel gedachten Winkel gehörigen Sehne zum Radius des Kreises. Halbirt man den Centriwinkel, und damit auch die Sehne, und faltet das Dreieck über dieser Halbierungslinie zusammen, so faltet sich auch die Sehne zu ihrer Hälfte, und zu einer Linie zusammen, deren Verhältniß zum Radius grade der Sinus genannt wird; daher der Name.

2. Bei derselben Drehung des Endschenkels wie in 1. nimmt der Cosinus im 1sten Quadranten von 1 bis 0 ab, wächst im 2ten Quadranten von 0 bis 1, nimmt im 3ten Quadranten von 1 bis 0 ab und wächst im 4ten Quadranten von 0 bis 1. Ueberdies hat der Zähler des Cosinusverhältnisses im 2ten und 3ten Quadranten die

entgegengesetzte Richtung von der im 1sten und 4ten; man betrachtet demnach den Cosinus im 1sten und 4ten Quadranten als positiv, im 2ten und 3ten als negativ. Für die Grenzen finden folgende Beziehungen statt:

$$\cos 0 = +1; \cos \frac{\pi}{2} = \pm 0; \cos \pi = -1; \cos \frac{3\pi}{2} = \mp 0; \cos 2\pi = +1$$

3. Bei derselben Drehung des Endschenfels wächst nach §. 1. 3 und §. 2. 1. 2 der absolute Werth der Tangente von 0 bis ∞ , nimmt im 2ten von ∞ bis 0 ab, wächst im 3ten von 0 bis ∞ , nimmt im 4ten von ∞ bis 0 ab. Im 1sten und 3ten Quadranten ist die Tangente positiv, im 2ten und 4ten negativ. Für die Grenzen finden folgende Beziehungen statt:

$$\operatorname{tg} 0 = 0; \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty; \operatorname{tg} \pi = \mp 0; \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} = \pm \infty; \operatorname{tg} 2\pi = 0$$

Dieser Gang der Funktion läßt sich auch durch Construction verfolgen. In Fig. 2 ist das Verhältniß $\frac{ef}{of}$ der absolute Werth der Tangente des veränderlichen Winkels; er erscheint daselbst in den 4 besonderen Werthen $\frac{e_1f_1}{of_1}, \frac{e_2f_2}{of_2}, \frac{e_3f_3}{of_3}, \frac{e_4f_4}{of_4}$. In diesen Formen sind dieselben jedoch nicht sehr geeignet, den Gang der Funktion deutlich hervortreten zu lassen, da Zähler und Nenner gleichzeitig veränderlich sind; sie lassen sich aber leicht in solche Formen bringen, daß nur die Zähler veränderlich sind. Denn wenn man im Punkte a eine Tangente an den Kreis legt und den Endschenkel in jeder Lage bis zum Durchschnitte mit derselben verlängert, so sind die obigen 4 Verhältnisse resp. gleich $\frac{at_1}{ao}, \frac{at_2}{ao}, \frac{at_3}{ao}, \frac{at_4}{ao}$. Hieraus erkennt man bei der Drehung des Endschenfels den angegebenen Gang der Veränderung leicht, auch sieht man, daß die Lagen at_2, at_4 denen at_1, at_3 entgegengesetzt sind. — Aus dieser Construction erkärt sich auch der Name.

4. Bei derselben Drehung des Endschenfels nimmt nach §. 1. 4 und §. 2. 3 der absolute Werth der Cotangente im 1sten Quadranten von ∞ bis 0 ab, wächst im 2ten von 0 bis ∞ , nimmt im 3ten von ∞ bis 0 ab, und wächst im 4ten von 0 bis ∞ . Im 1sten und 3ten Quadranten ist die Cotangente positiv, im 2ten und 4ten negativ. Für die Grenzen finden folgende Beziehungen statt:

$$\operatorname{cotg} 0 = \infty; \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = \pm 0; \operatorname{cotg} \pi = \mp \infty; \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{2} = \pm 0; \operatorname{cotg} 2\pi = \infty$$

Dieser Gang der Funktion läßt sich auch durch Construction verfolgen. In Fig. 2 ist das Verhältniß $\frac{of}{ef}$ der absolute Werth der Cotangente des veränderlichen Winkels; er erscheint daselbst in den 4 besonderen Werthen $\frac{of_1}{e_1f_1}, \frac{of_2}{e_2f_2}, \frac{of_3}{e_3f_3}, \frac{of_4}{e_4f_4}$. In diesen Formen sind dieselben jedoch nicht geeignet, den Gang der Funktion deutlich

hervortreten zu lassen, da Zähler und Nenner gleichzeitig veränderlich sind; sie lassen sich aber leicht in solche Formen bringen, daß nur die Zähler veränderlich sind. Denn wenn man im Punkte b (dem Endpunkte des ersten Quadranten) eine Tangente an den Kreis legt, und den Endschenkel in jeder Lage bis zum Durchschnitte mit demselben verlängert, so sind die obigen Verhältnisse resp. gleich $\frac{bc_1}{bo}$, $\frac{bc_2}{bo}$, $\frac{bc_3}{bo}$, $\frac{bc_4}{bo}$. Hieraus erkennt man bei der Drehung des Endschenkels den angegebenen Gang der Veränderlichkeit leicht; auch sieht man, daß die Lagen ac_2 , ac_4 denen ac_1 , ac_3 entgegengesetzt sind.

5. Bei derselben Drehung des Endschenkels wächst nach §. 1. 5 und §. 2. 2 der absolute Werth der Sekante im 1sten Quadranten von 1 bis ∞ , nimmt im 2ten Quadranten von ∞ bis 1 ab, wächst im 3ten Quadranten von 1 bis ∞ , und nimmt im 4ten Quadranten von ∞ bis 1 ab. Im 1sten und 4ten Quadranten ist die Sekante positiv, im 2ten und 3ten negativ. Für die Grenzen finden folgende Beziehungen statt:

$$\sec 0 = +1; \sec \frac{\pi}{2} = \pm \infty; \sec \pi = -1; \sec \frac{3\pi}{2} = \mp \infty; \sec 2\pi = +1$$

Dieser Gang der Funktion läßt sich auch durch Konstruktion verfolgen. Zu Fig. 2 ist $\frac{oe}{ef}$ der absolute Werth der Sekante; er er-

scheint daselbst in den 4 besonderen Werthen $\frac{oe_1}{of_1}$, $\frac{oe_2}{of_2}$, $\frac{oe_3}{of_3}$, $\frac{oe_4}{of_4}$.

In diesen Formen sind dieselben jedoch nicht sehr geeignet, den Gang der Funktion deutlich hervortreten zu lassen, da Zähler und Nenner veränderlich sind. Durch die Konstruktionen in 3. lassen sie sich aber in Formen bringen, in welchen nur die Zähler veränderlich sind, nämlich in die Formen $\frac{ot_1}{oa}$, $\frac{ot_2}{oa}$, $\frac{ot_3}{oa}$, $\frac{ot_4}{oa}$. Hieraus erkennt man bei

der Drehung des Endschenkels den oben angegebenen Gang der Veränderlichkeit der Funktion leicht; auch sieht man, daß, ot_1 und ot_4 in der Richtung des Endschenkels selbst liegen, ot_2 und ot_3 seiner Rückverlängerung angehören, und dadurch entgegengesetzte Lagen haben. Aus dieser Konstruktion erklärt sich auch der Name.

6. Bei derselben Drehung des Endschenkels nimmt nach §. 1. 6 und §. 2. 1 der absolute Werth der Cossekante im 1sten Quadranten von ∞ bis 1 ab, wächst im 2ten Quadranten von 1 bis ∞ , nimmt im 3ten Quadranten von ∞ bis 1 ab und wächst im 4ten Quadranten von 1 bis ∞ . Im 1sten und 2ten Quadranten ist die Cossekante positiv, im 3ten und 4ten negativ. Für die Grenzen finden folgende Beziehungen statt:

$$\operatorname{cosec} 0 = \infty; \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = +1; \operatorname{cosec} \pi = \pm \infty; \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2} = -1;$$

$$\operatorname{cosec} 2\pi = \infty.$$

Dieser Gang der Funktion läßt sich auch durch Konstruktion

verfolgen. In Fig. 2. ist das Verhältniß $\frac{oe}{ef}$ der absolute Werth der Cossekante; er erscheint daselbst in den 4 besonderen Werthen $\frac{oe_1}{e_1 f_1}$, $\frac{oe_2}{e_2 f_2}$, $\frac{oe_3}{e_3 f_3}$, $\frac{oe_4}{e_4 f_4}$. In diesen Formen sind dieselben jedoch nicht sehr geeignet, den Gang der Funktion deutlich hervortreten zu lassen, da Zähler und Nenner veränderlich sind. Durch die Konstruktion in 4 lassen sie sich aber in Formen bringen, in welchen nur die Zähler veränderlich sind, nämlich in die Formen $\frac{oc_1}{ob}$, $\frac{oc_2}{ob}$, $\frac{oc_3}{ob}$, $\frac{oc_4}{ob}$. Hieraus erkennt man bei der Drehung des Endschenfels den oben angegebenen Gang der Veränderlichkeit der Funktion leicht; auch sieht man, daß, während oc_1 und oc_2 in der Richtung des Endschenfels selbst liegen, oc_3 und oc_4 seiner Rückverlängerung angehören, und dadurch entgegengesetzte Lagen haben.

§. 3. Abhängigkeiten zwischen je 2 Funktionen desselben Winkels. In Fig. 2 ist in jeder Lage des Endschenfels

$$ef^2 + of^2 = oe^2 \quad (A)$$

Wenn man die Glieder dieser Gleichung durch oe^2 dividirt, so erhält man

$$\frac{ef^2}{oe^2} + \frac{of^2}{oe^2} = 1$$

oder
$$\left(\pm \frac{ef}{oe}\right)^2 + \left(\pm \frac{of}{oe}\right)^2 = 1$$

d. h.
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Dividirt man die Glieder der Gleichung A durch of^2 , oder die Glieder der Gleichung (1) durch $\cos^2 \alpha$, so erhält man

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \quad (2)$$

Dividirt man die Glieder der Gleichung A durch oe^2 , oder die Glieder der Gleichung (1) durch $\sin^2 \alpha$, so erhält man

$$1 + \cotg^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (3)$$

Zu diesen 3 Gleichungen zwischen den Quadraten der Funktionen (Gleichungen also, welche nur Abhängigkeiten zwischen den absoluten Werthen der Funktionen darstellen) kommen noch 3 Gleichungen aus §. 2. 4. 5. 6.

$$\operatorname{tg} \alpha \cotg \alpha = 1 \quad (4)$$

$$\cos \alpha \sec \alpha = 1 \quad (5)$$

$$\sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1 \quad (6)$$

Vermöge dieser Gleichungen kann man jede Funktion eines Winkels durch jede andre Funktion desselben Winkels ausdrücken.

$$a. \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (1) = \frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha} \quad (5) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cotg^2\alpha}} (4) = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} (3) \text{ vergl. (6)}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \cos \alpha &= \sqrt{1-\sin^2\alpha} (1) = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec} \alpha} (6) = \frac{\cotg \alpha}{\sqrt{1+\cotg^2\alpha}} (3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tg^2\alpha+1}} (4) = \frac{1}{\sec \alpha} (2) \text{ vergl. (5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \tg \alpha &= \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos \alpha} (5) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} (1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}} (6) = \frac{1}{\cotg \alpha} (3) \text{ vergl. (4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \cotg \alpha &= \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin \alpha} (6) = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} (1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}} (5) = \frac{1}{\tg \alpha} (2) \text{ vergl. (4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } \sec \alpha &= \frac{\sqrt{1+\cotg^2\alpha}}{\cotg \alpha} (4) = \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}} (3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} (6) = \frac{1}{\cos \alpha} (1) \text{ vergl. (5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{\sqrt{\tg^2\alpha+1}}{\tg \alpha} (4) = \frac{\sec \alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}} (2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} (5) = \frac{1}{\sin \alpha} (1) \text{ vergl. (6)} \end{aligned}$$

Es ist wohl darauf zu achten, daß jede Quadratwurzel eine Zeichenzweideutigkeit enthält, daß also nur die absoluten Werthe der Funktionen nach jeder andern Funktion ausgedrückt sind.

Abhängigkeiten zwischen Funktionen verschiedener Winkel, welche in bestimmten Beziehungen zu einander stehen.

§. 4. Abhängigkeiten zwischen Funktionen zweier spitzen Winkel, deren Summe $= \frac{\pi}{2}$ ist. (Complementswinkel.)

In Fig. 3 sind α und β 2 spitze Winkel, deren Summe $= \frac{\pi}{2}$ ist; der eine hat den Anfangsschenkel oa , der andre den

Anfangsschenkel ob; beide haben den gemeinsamen Endschenkel oe ; jener sei α , so ist dieser $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

$$1. \sin \alpha = \frac{ef}{oe} = \frac{og}{oe} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$2. \cos \alpha = \frac{of}{oe} = \frac{eg}{oe} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus des Complementwinkels, und umgekehrt. Daher der Name.

$$3. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$4. \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

Die Cotangente eines Winkels ist gleich der Tangente des Complementwinkels, und umgekehrt. Daher der Name.

$$5. \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$6. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \sec \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

Die Cosekante eines Winkels ist gleich der Sekante des Complementwinkels, und umgekehrt.

Die 3 Sätze lassen sich folgendermaßen in 1 zusammenfassen: Für 2 Complementwinkel ist jede Funktion des einen gleich der entsprechenden Cofunktion des andern.

§. 5. Abhängigkeiten zwischen den Funktionen zweier hohlen Winkel, deren Summe $= \pi$ ist. (Supplementswinkel.)

In Fig. 4 sind a_1oe und aoe 2 hohle Winkel, deren Summe $= \pi$ ist; der eine hat den Anfangsschenkel oa , der andre oa_1 ; beide haben den gemeinsamen Endschenkel oe ; jener heiße α , dieser $\pi - \alpha$. In der vorliegenden Figur ist α stumpf, also $\pi - \alpha$ spitz; das Gegentheil würde keinen wesentlichen Unterschied hervorbringen.

$$1. \sin \alpha = \frac{ef}{oe} = \sin (\pi - \alpha)$$

$$2. \cos \alpha = \frac{\text{of}}{\text{oe}} = -\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{\dots}$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{-\cos(\pi - \alpha)} = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$$

$$4. \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{-\operatorname{tg}(\pi - \alpha)} = -\operatorname{cotg}(\pi - \alpha)$$

$$5. \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\cos(\pi - \alpha)} = -\sec(\pi - \alpha)$$

$$6. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin(\pi - \alpha)} = \operatorname{cosec}(\pi - \alpha)$$

Die gleichnamigen Funktionen zweier Supplementswinkel sind den absoluten Werthen nach gleich; Gleichheit der Vorzeichen findet nur beim Sinus und der Cossekante statt.

§. 6. Abhängigkeiten zwischen den Funktionen solcher Winkel, welche kleiner als 2π sind, und deren Summe $= 2\pi$ ist.

In Fig. 5. und 6. sind 2 Winkel α oe, deren Summe $= 2\pi$ ist; beide haben denselben Anfangsschenkel und denselben Endschenkel, nur die Drehungsrichtung ist entgegengesetzt. Von den beiden Winkeln kann entweder, wie in Fig. 5., der eine $> \frac{3\pi}{2}$, der andere also $< \frac{\pi}{2}$

sein; oder der eine $> \pi$ und $< \frac{3\pi}{2}$, der andere also $< \pi$ und $> \frac{\pi}{2}$ sein. In beiden Fällen heiße der größere Winkel α , der kleinere $\pi - \alpha$; das Gegentheil wird keinen wesentlichen Unterschied hervorbringen.

$$1. \sin \alpha = \frac{\text{ef}}{\text{oe}} = \sin(2\pi - \alpha)$$

$$2. \text{Fig. 5. } \cos \alpha = \frac{\text{of}}{\text{oe}} = \cos(2\pi - \alpha)$$

$$\text{Fig. 6. } \cos \alpha = \frac{\text{of}}{\text{oe}} = \cos(2\pi - \alpha)$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$$

$$4. \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)} = \operatorname{cotg}(2\pi - \alpha)$$

$$5. \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos(2\pi - \alpha)} = \sec(2\pi - \alpha)$$

$$6. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{-\sin(2\pi - \alpha)} = -\operatorname{cosec}(2\pi - \alpha)$$

Die gleichnamigen Funktionen zweier Winkel, deren Summe $= 2\pi$ ist, sind den absoluten Werthen nach gleich; Gleichheit der Vorzeichen findet nur beim Cosinus und der Sekante statt.

§. 7. Entgegengesetzte Winkelwerthe. Wenn man zu einem gegebenen Winkel einen zweiten Winkel durch Drehung des Endschenfels hinzufügt, so wird dieser neue Winkel den gegebenen entweder vergrößern oder verkleinern, je nachdem die neue Drehungsrichtung der Richtung derjenigen Drehung, durch welche der erste Winkel entstanden gedacht wird, gleich oder entgegengesetzt ist. Im ersten Fall wird der neue Winkel als positiv, im zweiten als negativ zu betrachten sein. In Fig. 7. sei oa der Endschenkel irgend eines Winkels und gleichzeitig der Anfangsschenkel sowohl des Winkels aoe_1 als des Winkels aoe_2 , so wird durch Hinzufügung des einen dieser Winkel der ursprüngliche Winkel vergrößert, durch Hinzufügung des andern derselbe verkleinert; der eine ist positiv, der andre negativ. Wir wollen eine Drehung links herum als positiv, eine solche rechts herum als negativ, den Winkel aoe_1 also als positiv, den Winkel aoe_2 als negativ betrachten.

§. 8. Abhängigkeiten zwischen den Funktionen absolut gleicher, dem Vorzeichen nach entgegengesetzter Winkel. In Fig. 7. sind die beiden Winkel aoe_1 , aoe_2 absolut gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt; jener heiße $+\alpha$, dieser $-\alpha$.

$$1. \sin(-\alpha) = -\frac{e_2f}{oe_2} = -\frac{e_1f}{oe_1} = -\sin \alpha$$

Wäre $\alpha > \pi$ und $< 2\pi$, so wäre

$$\sin(-\alpha) = +\frac{e_2f}{oe_2} = +\frac{e_1f}{oe_1} = +\sin \alpha$$

$$2. \cos(-\alpha) = +\frac{of}{oe_2} = +\frac{of}{oe_1} = +\cos \alpha$$

Wäre $\alpha > \frac{\pi}{2}$ und $< \frac{3\pi}{2}$, so wäre

$$\cos(-\alpha) = -\frac{of}{oe_2} = -\frac{of}{oe_1} = -\cos \alpha$$

$$3. \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$4. \operatorname{cotg}(-\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(-\alpha)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\operatorname{cotg} \alpha$$

$$5. \sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

$$6. \operatorname{cosec}(-\alpha) = \frac{1}{\sin(-\alpha)} = -\frac{1}{\sin \alpha} = -\operatorname{cosec} \alpha$$

Die gleichnamigen Funktionen zweier absolut gleichenden Vorzeichen nach entgegengesetzten Winkel sind den absoluten Werthen nach gleich; Gleichheit der Vorzeichen findet nur beim Cosinus und der Secante statt.

§. 9. Winkel von mehreren Umläufen. Bisher entstand jeder Winkel durch einfache Drehung vom Anfangsschenkel zum Endschenkel; man kann jedoch den Endschenkel noch eine oder mehrere ganze Drehungen von der Größe 2π durchmachen lassen, so erhält man neue Winkel mit denselben Schenkeln. Dies findet ganz gleichmäßig statt, mag der gegebene Winkel positiv oder negativ, mag der hinzugefügte Winkel (das Vielfache von 2π) positiv oder negativ sein. Hieraus ergibt sich:

$$1. \sin(2m\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$2. \cos(2m\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$3. \operatorname{tg}(2m\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$4. \operatorname{cotg}(2m\pi + \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$5. \sec(2m\pi + \alpha) = \sec \alpha$$

$$6. \operatorname{cosec}(2m\pi + \alpha) = \operatorname{cosec} \alpha$$

wo m jede beliebige positive oder negative ganze Zahl, und α jeden beliebigen positiven oder negativen Winkel bezeichnet.

Die gleichnamigen Funktionen solcher Winkel, welche nur um ein positives oder negatives ganzes Vielfaches von 2π von einander unterschieden sind, sind den Zahlenwerthen und den Vorzeichen nach einander gleich. Die trigonometrischen Funktionen sind also periodische Funktionen.

Gleichzeitig ergibt sich leicht: Die gleichnamigen Funktionen solcher Winkel, welche sich um π oder ein (pos. oder neg.) ungrades Vielfaches von π unterscheiden, sind den absoluten Werthen nach gleich; Gleichheit der Vorzeichen findet nur bei der Tangente und der Cotangente statt. In Zeichen:

$$1. \sin \{ (2m+1)\pi + \alpha \} = -\sin \alpha$$

$$2. \cos \{ (2m+1)\pi + \alpha \} = -\cos \alpha$$

$$3. \operatorname{tg} \{ (2m+1)\pi + \alpha \} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$4. \operatorname{cotg} \{ (2m+1)\pi + \alpha \} = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$5. \sec \{ (2m+1)\pi + \alpha \} = -\sec \alpha$$

$$6. \operatorname{cosec} \{ (2m+1)\pi + \alpha \} = -\operatorname{cosec} \alpha$$

wo m und α gleiche Bedeutung wie oben haben.

§. 10. Abhängigkeiten zwischen den Funktionen der Summe zweier Winkel und den Funktionen der Summanden.

I. Für den Sinus.

Für alle positiven und negativen Werthe von α und β ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (I.)$$

Beweis.

1. Es sei $\alpha + \beta \leq \pi$, und α sowohl wie β positiv.Fig. 8. A. Es sei $\alpha < \frac{\pi}{2}$; $\beta < \frac{\pi}{2}$; $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$

Man wähle einen Punkt e des Endschenfels des Winkels $\alpha + \beta$, und fälle von da ein Perpendikel ef auf den Anfangsschenkel desselben Winkels, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{ef}{oe}$$

Um dieses Verhältniß mit den Funktionen der Winkel α und β vergleichen zu können, fälle man von dem Punkte e , der ein Punkt des Endschenfels des $\angle \beta$ ist, ein Perpendikel eg auf den Anfangsschenkel dieses Winkels, und vom Punkte g , der auch ein Punkt des Endschenfels des $\angle \alpha$ ist, ein Perpendikel gh auf den Anfangsschenkel dieses Winkels; so läßt sich ef als die Summe zweier Linien gh und ek betrachten, deren letztere man erhält, indem man von g aus eine Parallele mit oa zieht. Demnach ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{ef}{oe} = \frac{gh}{oe} + \frac{ek}{oe}$$

Diese beiden Verhältnisse sind nicht unmittelbar trigonometrische Funktionen; jedes derselben läßt sich aber als ein Produkt zweier Verhältnisse darstellen, von denen jedes eine trigonometrische Funktion eines der Winkel α und β ist. Es ist nämlich

$$\frac{gh}{oe} = \frac{gh}{go} \cdot \frac{go}{oe}; \quad \frac{ek}{oe} = \frac{ek}{eg} \cdot \frac{eg}{oe}$$

und überdies $\angle keg = \alpha$; folglich

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{gh}{go} \cdot \frac{go}{oe} + \frac{ek}{eg} \cdot \frac{eg}{oe} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Fig. 9. B. Es sei $\alpha < \frac{\pi}{2}$; $\beta < \frac{\pi}{2}$; $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$

Die Entwicklung stimmt buchstäblich mit der unter A. überein.

Fig. 10 C. Es sei $\alpha > \frac{\pi}{2}$; $\beta < \frac{\pi}{2}$; $\alpha + \beta < \pi$

Es ergibt sich wieder dasselbe Resultat, durch eine Entwicklung, welche mit der unter A bis auf 2 Ausnahmen buchstäblich übereinstimmt; es ist nämlich in diesem Falle $ef = gh - ek$ $\angle keg = \pi - \alpha$.

Für die Grenzfälle, nämlich für die Fälle, daß

(D) a. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$$(8.2) \quad b. \quad \alpha = \frac{\pi}{2}; \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$(8.2) \quad c. \quad \alpha + \beta = \pi$$

verificirt sich die Gleichung I. sehr leicht.

2. Es sei $\alpha < \pi; \beta < \pi; \alpha + \beta > \pi$ und α sowohl wie β positiv.

Es sei $\pi - \alpha = a, \pi - \beta = b$ also $\alpha = \pi - a, \beta = \pi - b$ so sind a und b positiv, und $a + b < \pi$. Es ist dann

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\{2\pi - (a + b)\} = -\sin(a + b) \quad (\S. 6.)$$

$$= -\sin a \cos b - \cos a \sin b \quad (1.)$$

3. Es seien α und β irgend 2 beliebige positive oder negative Winkelwerthe.

Es giebt dann immer 2 positive oder negative ganze Zahlen m und n , und 2 positive Winkel a und b , welche einzeln kleiner als π sind, so daß

$$\alpha = m\pi - a \quad \beta = n\pi - b$$

also

$$a = m\pi - \alpha \quad b = n\pi - \beta$$

Dann ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\{(m + n)\pi - (a + b)\}$$

Der Ausdruck rechts läßt sich immer auf $\sin(a + b)$ zurückführen, doch ist das Vorzeichen verschieden, je nachdem $m + n$ grade oder ungrade ist.

A. Es sei $m + n$ grade, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\{-(a + b)\} \quad (\S. 9.)$$

$$= -\sin(a + b) \quad (\S. 8.)$$

$$= -\sin a \cos b - \cos a \sin b \quad (1. 2.)$$

$$= -\sin(m\pi - \alpha) \cos(n\pi - \beta) - \cos(m\pi - \alpha) \sin(n\pi - \beta)$$

Bei der weiteren Zurückführung auf die Funktionen von α und β kommt es nun darauf an, ob m und n grade oder ungrade sind. Da $m + n$ grade ist, so müssen m und n entweder beide grade, oder beide ungrade sein.

a. Es seien m und n grade, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = -\sin(-\alpha) \cos(-\beta) - \cos(-\alpha) \sin(-\beta) \quad (\S. 9.)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\S. 8.)$$

b. Es seien m und n ungerade, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = -\{-\sin(-\alpha)\} \{-\cos(-\beta)\} - \{-\cos(-\alpha)\} \{-\sin(-\beta)\} \quad (\S. 9.)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\S. 8.)$$

B. Es sei $m + n$ ungerade, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = -\sin\{-(\alpha + \beta)\} \quad (\S. 9.)$$

$$= \sin(\alpha + \beta) \quad (\S. 8.)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (1. 2.)$$

$$= \sin(m\pi - \alpha) \cos(n\pi - \beta) + \cos(m\pi - \alpha) \sin(n\pi - \beta)$$

Bei der weiteren Zurückführung auf die Funktionen von α und β kommt es nun darauf an, ob m und n grade oder ungrade sind. Da $m + n$ ungerade ist, so muß die eine dieser beiden Zahlen grade, die andre ungrade sein.

a. Es sei m grade und n ungerade, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(-\alpha) \cos(-\beta) + \cos(-\alpha) \sin(-\beta) \quad (\S. 9.)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\S. 8.)$$

b. Es sei m ungerade und n grade, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = -\sin(-\alpha) \cos(-\beta) - \cos(-\alpha) \sin(-\beta) \quad (\S. 9.)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\S. 8.)$$

Hiedurch ist die Gleichung I, und dadurch die wichtigste Eigenschaft der Winkelfunktionen bewiesen.

Setzt man insbesondere $-\beta$ an die Stelle von β , so erhält man

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\S. 8.)$$

II. Für den Cosinus.

Für alle Werthe von α und β ist

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (II.)$$

Diese Gleichung läßt sich ganz auf demselben Wege beweisen, auf welchem I bewiesen ist, und alle dazu nöthigen Constructionen sind bereits in Fig. 8. 9. 10. enthalten. Diese Entwicklung ist eine angemessene Übung für Anfänger; kürzer läßt sich der Beweis folgendermaßen führen.

Aus I ergiebt sich, daß für jeden Werth von ϕ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \cos \phi$$

ist. (Vergl. §. 4.) Setzt man ψ statt $\frac{\pi}{2} - \phi$ also $\frac{\pi}{2} - \psi$ statt ϕ , so ergiebt sich hieraus, daß für jeden Werth von ψ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin \psi$$

Folglich ist für alle Werthe von α und β

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right\} = \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \text{tg} \\
 &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta \\
 &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta
 \end{aligned}$$

Setzt man insbesondre $-\beta$ an die Stelle von β , so erhält man

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

III. Für die Tangente.

Für alle Werthe von α und β ist

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \quad (\S. 1.)$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \quad (\text{I. II.})$$

$$= \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta} = \frac{\text{cotg} \beta + \text{cotg} \alpha}{\text{cotg} \alpha \text{cotg} \beta - 1}$$

Setzt man insbesondre $-\beta$ an die Stelle von β , so erhält man

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg} \alpha - \text{tg} \beta}{1 + \text{tg} \alpha \text{tg} \beta} = \frac{\text{cotg} \beta - \text{cotg} \alpha}{\text{cotg} \alpha \text{cotg} \beta + 1}$$

IV. Für die Cotangente.

Für alle Werthe von α und β ist

$$\text{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha + \beta)} \quad (\S. 1.)$$

$$= \frac{1 - \text{tg} \alpha \text{tg} \beta}{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta} = \frac{\text{cotg} \alpha \text{cotg} \beta - 1}{\text{cotg} \beta + \text{cotg} \alpha}$$

$$\text{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{1 + \text{tg} \alpha \text{tg} \beta}{\text{tg} \alpha - \text{tg} \beta} = \frac{\text{cotg} \alpha \text{cotg} \beta + 1}{\text{cotg} \beta - \text{cotg} \alpha}$$

§. 11. Folgerungen für solche Winkelpaare, deren Summe oder Differenz $= \frac{\pi}{2}$ oder $= \pi$ ist.

Für jeden Werth von α ist

$$\text{I. } \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$\text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{cotg} \alpha \quad \text{cotg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \text{tg} \alpha$$

$$\text{II. } \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{cotg} \alpha \quad \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} \sin (\pi - \alpha) &= \sin \alpha & \cos (\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg} (\pi - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{cotg} (\pi - \alpha) &= -\operatorname{cotg} \alpha \end{aligned}$$

$$\text{IV.} \quad \begin{aligned} \sin (\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos (\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \operatorname{tg} (\pi + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{cotg} (\pi + \alpha) &= \operatorname{cotg} \alpha \end{aligned}$$

§. 11. Darstellung der Funktionen eines Winkels durch die Funktionen seiner Hälfte.

1. Für jeden Werth von α ist

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin (\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

Diesem Ausdrucke lassen sich nach §. 2. andre Formen geben.

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 2 \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2 \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} = \frac{2 \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec^2 \alpha} \\ &= \pm \frac{2 \operatorname{cotg} \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} = \pm \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{aligned}$$

Die 4 Ausdrücke, welche Quadratwurzeln enthalten, sind vermöge derselben zweideutig rücksichtlich ihrer Vorzeichen; diese Zweideutigkeit geht mit in die beiden letzten aus ihnen hervorgehenden Ausdrücke, aus welchen die Quadratwurzeln verschwunden sind, hinüber; es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß bei denselben in der That keine Zweideutigkeit vorhanden ist, daß vielmehr immer auch rücksichtlich des Vorzeichens

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{cotg} \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

Denn die Nenner $1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$, $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1$ sind immer positiv, und die Zähler $2 \operatorname{cotg} \alpha$, $2 \operatorname{tg} \alpha$ stimmen für alle Werthe von α in den Vorzeichen mit $\sin 2\alpha$ überein.

Es trat die Zeichenzweideutigkeit dadurch ein, daß der Weg, auf welchem die betreffenden Ausdrücke für $\sin 2\alpha$ gefunden wurden, von einer Abhängigkeit nur zwischen den absoluten, nicht den algebraischen Werthen der Funktionen ausgeht; auf folgendem Wege tritt sie nicht ein.

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin^2 \alpha = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha \\ &= \frac{2 \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sec^2 \alpha} \\ &= \frac{2 \operatorname{cotg} \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} \end{aligned}$$

2. Für jeden Werth von α ist

$$\cos 2\alpha = \cos (\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 2}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} = \frac{2 - \sec^2 \alpha}{\sec^2 \alpha}$$

$$= \frac{\cotg^2 \alpha - 1}{\cotg^2 \alpha + 1} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$= \frac{\cotg \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\cotg \alpha + \operatorname{tg} \alpha}$$

3. Für jeden Werth von α ist

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cotg \alpha}{\cotg^2 \alpha - 1}$$

4. Für jeden Werth von α ist

$$\cotg 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cotg^2 \alpha - 1}{2 \cotg \alpha}$$

§. 13. Darstellung der Funktionen eines Winkels durch die Funktionen des doppelten Winkels.

1. Nach §. 12. 2. ist für jeden Werth von α

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

2. Nach §. 12. 2 ist für jeden Werth von α

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

3. Nach 1. 2. ist für jeden Werth von α

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Multipliziert man in dem Bruche unter dem Wurzelzeichen Zähler und Nenner mit $1 - \cos \alpha$ oder mit $1 + \cos \alpha$, so erhält man

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Diese Gleichung besteht vermöge der Art der Ableitung zunächst nur zwischen den absoluten Werthen (vergl. §. 13. 1.) doch erkennt man leicht, daß auch rücksichtlich der Vorzeichen immer Gleichheit stattfindet, da $1 - \cos \alpha$ sowohl wie $1 + \cos \alpha$ immer positiv sind, und $\sin \alpha$ für jeden Werth von α mit $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ im Vorzeichen übereinstimmt.

Aus dem ersten der beiden letzten Ausdrücke ergibt sich auch:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha$$

4. Nach 3. ist für jeden Werth von α

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \\ &= \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \end{aligned}$$

Zusatz. Aus 3. 4 ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha &= 2 \operatorname{cosec} \alpha \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha &= -2 \operatorname{cotg} \alpha \end{aligned}$$

§. 14. Formeln für die Funktionen solcher Winkelsummen deren einer Summand $\frac{\pi}{4}$ ist.

Nach §. 11. I. ist für jeden Werth von α

$$1. \quad \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

$$2. \quad \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

$$3. \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

$$4. \quad \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

$$5. \quad \text{Da } \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1 \text{ ist, indem ein rechtwinkliges}$$

Dreieck, in welchem 1 Winkel $= \frac{\pi}{4}$ ist, gleichschenkelig ist, so ist nach §. 10. III.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \\ \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \end{aligned} \right\} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha - 1}{\operatorname{cotg} \alpha + 1} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$$

Multipliziert man im letzten Ausdrucke Zähler und Nenner mit $\cos \alpha + \sin \alpha$, oder mit $\cos \alpha - \sin \alpha$, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \\ \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \end{aligned} \right\} = \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$6. \left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \\ \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \end{aligned} \right\} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha + 1}{\operatorname{cotg} \alpha - 1} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \sec 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha$$

Zusatz. Aus 5. 6. ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \\ \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) + \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \end{aligned} \right\} = 2 \sec 2\alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \\ \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) - \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \end{aligned} \right\} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$$

§. 15. Verwandlung einer Summe trigonometrischer Funktionen in ein Produkt.

1. Es soll $\sin \alpha + \sin \beta$ in Form eines Produktes dargestellt werden; diese Aufgabe ist sogleich gelöst, wenn α die Summe zweier Winkel und β die Differenz derselben Winkel ist, denn nach §. 10. I. ist

$$\sin (\varphi + \psi) + \sin (\varphi - \psi) = 2 \sin \varphi \cos \psi$$

Es lassen sich aber immer 2 Winkel finden, deren Summe $= \alpha$ und deren Differenz $= \beta$ ist; es sind die Winkel

$$\frac{1}{2} (\alpha + \beta) \text{ und } \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

Es ist also

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin \left\{ \frac{1}{2} (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right\} + \sin \left\{ \frac{1}{2} (\alpha + \beta) - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right\} \\ &= 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

2. Setzt man in der letzten Gleichung $-\beta$ an die Stelle von β , so geht sie über in

$$\sin \alpha + \sin (-\beta) = 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

3. Setzt man in 1. $\frac{\pi}{2} + \alpha$ an die Stelle von α und $\frac{\pi}{2} + \beta$ an die Stelle von β , so geht sie über in

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) &= 2 \sin \frac{1}{2} \{ \pi + (\alpha + \beta) \} \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

4. Setzt man in 3. $\pi - \beta$ an die Stelle von β , so erhält man

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos (\pi - \beta) &= 2 \cos \frac{1}{2} \{ \pi + (\alpha - \beta) \} \cos \frac{1}{2} \{ (\alpha + \beta) - \pi \} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \\ &= \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \end{aligned}$$

Setzt man in 5. $-\beta$ an die Stelle von β , so erhält man

$$6. \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

7. In gleicher Weise, wie 5., ergibt sich

$$\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

ein Resultat, welches sich auch dadurch ableiten läßt, daß man in 5 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ und $\frac{\pi}{2} - \beta$ an die Stelle von α und β setzt.

8. Ebenso

$$\cotg \alpha - \cotg \beta = - \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$9. \quad \tg \alpha + \cotg \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$$

$$10. \quad \tg \alpha - \cotg \beta = - \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$$

§. 16. Folgerungen aus §. 15. für besondere Winkelwerthe.

1. Setzt man in §. 15. 1. 2. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ so erhält man

$$1 + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$= 2 \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \beta \right\}$$

$$= 2 \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \beta \right\}$$

$$1 - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)$$

$$= 2 \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \beta \right\}$$

$$= 2 \cos^2 \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \beta \right\}$$

2. Setzt man in §. 15. 3. 4. $\alpha = 0$, so erhält man

$$1 + \cos \beta = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \beta$$

$$1 - \cos \beta = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \beta$$

Zwei Formeln, welche schon in §. 13. 1. 2. enthalten sind.

3. Setzt man in §. 15. 5. 6. 7. 8. $\beta = \frac{\pi}{4}$ so erhält man

$$1 + \tg \beta = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \beta}$$

$$1 - \tg \beta = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \beta}$$

$$1 + \cotg \beta = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right)}{\sin \frac{\pi}{4} \sin \beta}$$

$$1 - \cotg \beta = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)}{\sin \frac{\pi}{4} \sin \beta}$$

Es ist aber $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = + \sqrt{\frac{1}{2}}$, folglich

$$1 + \tg \beta = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right)}{\cos \beta} \sqrt{2} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)}{\cos \beta} \sqrt{2}$$

$$1 - \tg \beta = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)}{\cos \beta} \sqrt{2} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right)}{\cos \beta} \sqrt{2}$$

$$1 + \cotg \beta = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right)}{\sin \beta} \sqrt{2} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)}{\sin \beta} \sqrt{2}$$

$$1 - \cotg \beta = - \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)}{\sin \beta} \sqrt{2} = - \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right)}{\sin \beta} \sqrt{2}$$

In allen diesen Formeln ist unter $\sqrt{2}$ der positive Werth verstanden.

§. 17. Folgerungen aus §. 15. und §. 16. durch Verbindungen der dort gefundenen Gleichungen.

1. Durch Division erhält man aus §. 15. 1. 2.

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\tg \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\tg \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}$$

2. Ebenso aus §. 15. 3. 4.

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = - \cotg \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cotg \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

3. Ebenso aus §. 15. 1. 3.

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tg \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

4. Ebenso aus §. 15. 2. 3.

$$\left(\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \right)$$

5. Ebenso aus §. 15. 1. 4.

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

6. Ebenso aus §. 15. 2. 4.

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

7. Ebenso aus §. 15. 5. 6.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}$$

8. Ebenso aus §. 15. 7. 8.

$$\frac{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta} = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}$$

9. Ebenso aus §. 15. 9. 10.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta} = -\frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta)}$$

10. Ebenso aus §. 15. 5. 7.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

11. Ebenso aus §. 15. 6. 8.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{cotg} \alpha - \operatorname{cotg} \beta} = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$$

12. Ebenso aus §. 16. 1.

$$\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} = \operatorname{tg}^2 \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \beta \right\} = \operatorname{cotg}^2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \beta \right\}$$

Vgl. §. 14. 6.

13. Ebenso aus §. 16. 2.

$$\frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta} = \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \beta$$

Vgl. §. 13. 4.

14. Ebenso aus §. 16. 3.

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right) = \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)$$

$$\frac{1 + \cotg \beta}{1 - \cotg \beta} = - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \beta \right) = - \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)$$

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 + \cotg \beta} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \beta}{1 - \cotg \beta} = - \operatorname{tg} \beta$$

Die meisten der obigen Formeln lassen sich auch auf andern Wegen aus den Grundformeln ableiten; das Auffuchen solcher andern Wege ist eine sehr angemessene Uebung für Anfänger.

§. 18. Weitere Folgerungen aus §. 15. durch andre Verbindungen der dort gefundenen Gleichungen.

1. Aus §. 15. 1. 2. erhält man durch Multiplikation

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \sin \beta) (\sin \alpha - \sin \beta) = \\ & 4 \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \\ & \text{folglich} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$$

2. Ebenso aus §. 15. 3. 4.

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = - \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$$

3. Ebenso aus §. 15. 5. 6.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

4. Ebenso aus §. 15. 7. 8.

$$\cotg^2 \alpha - \cotg^2 \beta = - \frac{\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = - \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

5. Ebenso aus §. 15. 9. 10.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \cotg^2 \beta = - \frac{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

Es ist aber

$$- \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin^2 \beta - \cos^2 \alpha$$

folglich

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \cotg^2 \beta = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta} = \frac{\sin^2 \beta - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

Auch die meisten dieser Formeln (1—5) lassen sich auf andern Wegen ableiten.

6. Für eine Gruppe von beliebig vielen, beliebig großen Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa, \lambda$ finden auf Grund des §. 15. 6. 8. folgende Gleichungen statt.

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \dots + \frac{\sin(\kappa - \lambda)}{\cos \kappa \cos \lambda} + \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\cos \lambda \cos \alpha} = 0$$

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} + \dots + \frac{\sin(\kappa - \lambda)}{\sin \kappa \sin \lambda} + \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda \sin \alpha} = 0$$

Beschränkt man die Betrachtung auf 3 Winkel α, β, γ und schafft aus den daraus entstehenden Gleichungen die Nenner weg, so erhält man

$$\sin(\alpha - \beta) \cos \gamma + \sin(\beta - \gamma) \cos \alpha + \sin(\gamma - \alpha) \cos \beta = 0$$

$$\sin(\alpha - \beta) \sin \gamma + \sin(\beta - \gamma) \sin \alpha + \sin(\gamma - \alpha) \sin \beta = 0$$

Setzt man in der 2ten Gleichung $\alpha = a, \beta = a + b, \gamma = a + b + c$ so erhält man folgende öfters in Anwendung kommende Formel.

$$\sin(a + b) \sin(b + c) = \sin a \sin c + \sin b \sin(a + b + c)$$

§. 19. Beziehungen zwischen den Funktionen von 3 Winkeln, deren Summe $= \pi$ ist.

Durch Anwendung des §. 15. 3. ergibt sich für alle Winkelwerthe von α, β, γ .

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(-\alpha + \beta + \gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \quad (A)$$

Hat man insbesondere 3 Winkel a, b, c , deren Summe $= \pi$ ist, und man setzt in der Gleichung (A)

$$\alpha = \frac{1}{2} a \quad \beta = \frac{1}{2} b \quad \gamma = \frac{1}{2} c$$

so geht sie über in

$$(1) \quad \sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c$$

Setzt man in der Gleichung (A)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} a \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} b \quad \gamma = -\frac{1}{2} c$$

so geht sie über in

$$(2) \quad \sin a + \sin b - \sin c = 4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c$$

Setzt man in der Gleichung (A)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} a \quad \beta = -\frac{1}{2} b \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} c$$

so geht sie über in

$$(3) \quad \sin a - \sin b + \sin c = 4 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c$$

Setzt man in der Gleichung (A)

$$\alpha = -\frac{1}{2} a \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} b \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} c$$

so geht sie über in

$$(4) \quad -\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c$$

Die Gleichungen (2) bis (4) sind im Wesen dieselben. Durch Addition der Gleichungen (1) bis (4) ergibt sich

$$(5) \quad \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c + \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c + \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c$, so erhält man:

$$(6) \quad \cotg \frac{1}{2} a \cotg \frac{1}{2} b \cotg \frac{1}{2} c = \cotg \frac{1}{2} a + \cotg \frac{1}{2} b + \cotg \frac{1}{2} c$$

Setzt man in dieser Gleichung an die Stelle von a, b, c resp. $\pi - 2a, \pi - 2b, \pi - 2c$, was geschehen darf, da die Summe auch dieser 3 Winkel $= \pi$ ist, wenn $a + b + c = \pi$ ist, so geht sie über in

$$(7) \quad \tg a \tg b \tg c = \tg a + \tg b + \tg c$$

Diese Gleichung läßt sich auch leicht aus §. 10. III. ableiten, wenn man bedenkt, daß $\tg(a+b) = -\tg c$ ist, vorausgesetzt, daß $a + b + c = \pi$ ist.

Multipliziert man die Gleichung (1) mit der Gleichung (2), so erhält man

$$(8) \quad \cos^2 \frac{1}{2} c = \frac{(\sin a + \sin b + \sin c)(\sin a + \sin b - \sin c)}{4 \sin a \sin b}$$

Multipliziert man die Gleichung (3) mit der Gleichung (4) so erhält man

$$(9) \quad \sin^2 \frac{1}{2} c = \frac{(\sin a - \sin b + \sin c)(-\sin a + \sin b + \sin c)}{4 \sin a \sin b}$$

Multipliziert man die Gleichungen (1) bis (4), oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (8) und (9) mit einander, so erhält man

$$(10) \quad \sin^2 c = \frac{(\sin a + \sin b + \sin c)(\sin a + \sin b - \sin c)(\sin a - \sin b + \sin c)(-\sin a + \sin b + \sin c)}{4 \sin^2 a \sin^2 b}$$

oder

$$4 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c =$$

$$(\sin a + \sin b + \sin c)(\sin a + \sin b - \sin c)(\sin a - \sin b + \sin c)(-\sin a + \sin b + \sin c)$$

§. 20. Darstellung des Sinus und des Cosinus eines vielfachen Winkels nach Sinus und Cosinus des einfachen Winkels.

Die Aufgabe ist, $\sin m\alpha$ und $\cos m\alpha$ durch $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ darzustellen, wenn m eine beliebig absolute ganze Zahl bezeichnet.

Für bestimmte Werthe der Zahl m , von 2 anfangend, ist die Lösung dieser Aufgabe leicht.

Nach §. 12. 1. 2. ist

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Ferner ist nach §. 10. I. II.

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin (2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\ &= 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos (2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned} \sin 4\alpha &= \sin (3\alpha + \alpha) = \sin 3\alpha \cos \alpha + \cos 3\alpha \sin \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha &= \cos (3\alpha + \alpha) = \cos 3\alpha \cos \alpha - \sin 3\alpha \sin \alpha \\ &= \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha \end{aligned}$$

In derselben Weise kann man bis zu jedem beliebigen Werthe von m fortfahren; man erhält aber dadurch kein allgemeines Gesetz; wohl aber sieht man, daß für die in Betracht gezogenen Werthe des m die Glieder der für $\sin m\alpha$ gefundenen Ausdrücke, abgesehen vom Vorzeichen, übereinstimmen mit den Gliedern grader Ordnung der Newton'schen Entwicklung von $(\cos \alpha + \sin \alpha)^m$; und die Glieder der für $\cos m\alpha$ gefundenen Ausdrücke, abgesehen vom Vorzeichen, übereinstimmen mit den Gliedern ungerader Ordnung derselben Entwicklung von $(\cos \alpha + \sin \alpha)^m$; daß in den Ausdrücken sowohl für $\sin m\alpha$ wie für $\cos m\alpha$ die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

Dieses Gesetz ist allgemeingültig d. h. für jeden absoluten ganzen Werth des m ist:

$$\sin m\alpha = \frac{m}{1} \cos^{m-1}\alpha \sin\alpha - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-3}\alpha \sin^3\alpha + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-5}\alpha \sin^5\alpha - \dots$$

$$\cos m\alpha = \cos^m\alpha - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2}\alpha \sin^2\alpha + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-4}\alpha \sin^4\alpha - \dots \quad (I)$$

Dies läßt sich durch das sogenannte Stürmer'sche Verfahren beweisen, d. h. dadurch, daß man nachweist, daß, wenn die beiden Gleichungen für irgend einen besondern Werth p des m wahr sind, sie dann auch für den folgenden $p+1$, und somit für alle folgenden wahr sind; sie sind aber, wie oben gezeigt, für $m=2$, $m=3$, $m=4$ wahr.

Es sei also

$$\sin p\alpha = \frac{p}{1} \cos^{p-1}\alpha \sin\alpha - \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \cos^{p-3}\alpha \sin^3\alpha + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{p-5}\alpha \sin^5\alpha - \dots$$

$$\cos p\alpha = \cos^p\alpha - \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \cos^{p-2}\alpha \sin^2\alpha + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{p-4}\alpha \sin^4\alpha - \dots$$

Es ist

$$\sin(p+1)\alpha = \sin p\alpha \cos\alpha + \cos p\alpha \sin\alpha$$

$$= \left\{ \frac{p}{1} \cos^p\alpha \sin\alpha - \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \cos^{p-2}\alpha \sin^3\alpha + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{p-4}\alpha \sin^5\alpha - \dots \right\} \cos\alpha + \left\{ \cos^p\alpha - \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \cos^{p-2}\alpha \sin^2\alpha + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{p-4}\alpha \sin^4\alpha - \dots \right\} \sin\alpha$$

$$= \frac{p+1}{1} \cos^p \alpha \sin \alpha - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{p-2} \alpha \sin^3 \alpha + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{p-4} \alpha \sin^5 \alpha - \dots$$

eine Gleichung, welche für $m = p+1$ ganz mit der ersten der beiden Gleichungen I. übereinstimmt, so daß diese allgemein gültig ist.

Es ist ferner:

$$\cos (p+1) \alpha = \cos p \alpha \cos \alpha - \sin p \alpha \sin \alpha$$

$$= \left\{ \cos^{p+1} \alpha - \frac{p}{1 \cdot 2} \cos^{p-1} \alpha \sin^2 \alpha + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{p-3} \alpha \sin^4 \alpha - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{p-5} \alpha \sin^6 \alpha + \dots \right\} \cos \alpha - \left\{ \frac{p}{1} \cos^p \alpha \sin \alpha + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{p-2} \alpha \sin^3 \alpha + \frac{p(p-1)p(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{p-4} \alpha \sin^5 \alpha - \dots \right\} \sin \alpha$$

eine Gleichung, welche für $m = p+1$ ganz mit der 2ten der Gleichungen I. übereinstimmt, so daß auch diese allgemein gültig ist.

§. 21. Einrichtung der trigonometrischen Tafeln; mit besondrer Berücksichtigung der Vega'schen.

Die trigonometrischen Funktionen eines Winkels sind nicht in so einfacher Weise von demselben abhängig, daß sich mit Leichtigkeit zum Behufe der Anwendung für jeden besonderen Winkelwerth der besondere Werth der betreffenden Funktion, und umgekehrt, sogleich auffinden ließe. Man hat deshalb die Winkel und ihre trigonometrischen Funktionen, oder gewöhnlicher die Winkel und die gemeinen Logarithmen ihrer trigonometrischen Funktionen in Tabellen zusammengestellt. Nach §. 11. und §. 9. wird eine solche Tabelle, um vollständig zu sein, sich nur über die Winkel von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ zu erstrecken brauchen.

Jede solche Tabelle hat von selbst 2 Schranken. Zunächst kann sie nicht alle Winkel mit den Logarithmen ihrer trigonometrischen Funktionen geben, sondern nur einen beschränkten Theil derselben. Die Vega'schen Tafeln geben die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen der Winkel von $0^{\circ} 0' 0''$ bis $0^{\circ} 0' 59'',9$ in Intervallen von Zehntel-Sekunden; der Winkel von $0^{\circ} 0'$ bis $1^{\circ} 31'$ in Intervallen von 1 Sekunde; der Winkel von 6° bis 6° in Intervallen von 10 Sekunden, und der Winkel von 6° bis 45° in Intervallen von 1 Minute. — Zweitens kann eine solche Tabelle nicht die Bollwerthe der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen enthalten, sondern nur Näherungswerthe derselben. Die Vega'schen Tafeln geben siebenstellige Näherungswerthe.

Die Vega'schen Tafeln enthalten, obgleich sie in ihrem größesten Theile unmittelbar nur die siebenstelligen Näherungswerthe der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen derjenigen Winkel geben, welche ganze Vielfache einer Minute sind, doch auch die Möglichkeit, diese Logarithmen für Winkel, welche ganze Vielfache einer Zehntel-Sekunde sind, mit demselben Grade der Näherung anzugeben. Es beruht dies auf ähnlichen Gründen, wie das entsprechende Verfahren bei den Logarithmen der natürlichen Zahlen. (Vr. §. 88.)

Eine detaillirte Anweisung zum Gebrauche der log. Tafeln, insbesondere zur Lösung der beiden Hauptaufgaben:

1. Zu jedem gegebenen Winkel vermittelt der Tafeln die zugehörige trigonometrische Funktion, resp. ihren Logarithmus zu finden.
 2. Zu jeder direkt oder durch ihren Logarithmus gegebenen trigonometrischen Funktion vermittelt der Tafeln den zugehörigen Winkel zu finden,
- wird dem Unterrichte und den Einleitungen zu solchen Tafeln überlassen.

Bezeichnet man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit c ; die Katheten mit a und b ; die Gegenüberliegenden Winkel mit α und β ; so sind die 4 Abhängigkeiten durch folgende Gleichungen dargestellt.

$$(1. 3. 1. 2) \quad \cot \alpha = \frac{b}{a} \quad \cot \beta = \frac{a}{b}$$

$$(1. 1. 2) \quad \cos \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \beta = \frac{b}{c}$$

$$(2. 1. 2) \quad \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$4. \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Zweites Capitel.

Die ebene Trigonometrie.

§. 22. Die Hauptaufgabe der ebenen Trigonometrie, aus welcher alle andern hervorgehen, ist die Darstellung der Abhängigkeiten zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks durch Gleichungen.

Unter den Dreiecken zeichnet sich für diese Aufgabe das rechtwinklige durch Einfachheit und häufige Anwendung aus; es soll deshalb besonders betrachtet werden.

Unter Bestimmungsstücken eines Dreiecks sind seine 3 Seiten und seine 3 Winkel verstanden.

A. Das rechtwinklige Dreieck.

Ein rechtwinkliges Dreieck ist vollständig bestimmt durch 2 von einander unabhängige seiner 5 Bestimmungsstücke (nach Ausschluß des rechten Winkels). Es besteht also zwischen je 2 von einander unabhängigen und jedem 3ten Stück, oder kurz, zwischen je 3 Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks eine Abhängigkeit; nur können unter diesen 3 Stücken nicht 2 Winkel sein, da diese sich gegenseitig vollständig, und ohne irgend eine Beziehung zu einer Seite bestimmen. Es besteht demnach eine Abhängigkeit:

1. Zwischen den beiden Katheten und 1 Winkel.
2. Zwischen der Hypotenuse, 1 Kathete und dem anliegenden Winkel.
3. Zwischen der Hypotenuse, 1 Kathete und dem gegenüberliegenden Winkel.
4. Zwischen der Hypotenuse und beiden Katheten.

Die letzte Abhängigkeit besteht nur zwischen Seiten, ist also keine trigonometrische, ist auch schon in der Plan. behandelt. Sie hängt aber so eng mit den andern zusammen, daß sie der vollständigen Behandlung des Dreiecks wegen mit den andern behandelt werden soll.

Bezeichnet man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit c ; die Katheten mit a, b ; die gegenüberliegenden Winkel resp. mit α, β ; so sind die 4 Abhängigkeiten durch folgende Gleichungen dargestellt.

$$1. \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \beta \quad (\S. 1. 3. 4.)$$

$$2. \quad \frac{a}{c} = \cos \beta \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha \quad (\S. 1. 1.)$$

$$3. \quad \frac{a}{c} = \sin \alpha \quad \frac{b}{c} = \sin \beta \quad (\S. 1. 2.)$$

$$4. \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Durch Auflösung jeder dieser Gleichungen nach jeder der darin vorkommenden Größen werden die Aufgaben vom rechtwinkligen Dreieck, welche bei ausschließlicher Betrachtung der Seiten und Winkel auftreten, gelöst.

Aufgaben vom rechtwinkligen Dreieck.

§. 24. Es seien gegeben: die Hypotenuse und 1 Winkel; die 3 andern Stücke danach zu bestimmen.
Gegeben c, α ; gesucht β, a, b .

$$1. \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$2. \quad a = c \sin \alpha \quad (\S. 23. 3.)$$

$$3. \quad b = c \cos \alpha \quad (\S. 23. 2.)$$

§. 25. Es seien gegeben: Eine Kathete und der anliegende Winkel; die 3 andern Stücke danach zu bestimmen.

Gegeben a, β ; Gesucht α, c, b .

$$1. \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$2. \quad c = \frac{a}{\cos \beta} \quad (\S. 23. 2.)$$

$$3. \quad b = a \operatorname{tg} \beta \quad (\S. 23. 1.)$$

§. 26. Es seien gegeben: Eine Kathete und der gegenüberliegende Winkel; die 3 andern Stücke danach zu bestimmen.

Gegeben a, α ; gesucht β, c, b .

$$1. \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$2. \quad c = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (\S. 23. 3.)$$

$$3. \quad b = a \operatorname{cotg} \alpha \quad (\S. 23. 1.)$$

§. 27. Es seien gegeben: die Hypotenuse und eine Kathete; die 3 andern Stücke danach zu bestimmen.

Gegeben c, a ; gesucht α, β, b

$$1. \sin \alpha = \frac{a}{c} \quad (\S. 23. 3.)$$

$$2. \cos \beta = \frac{a}{c} \quad (\S. 23. 2.)$$

$$3. b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)} \quad (\S. 23. 4.)$$

§. 28. Es seien gegeben: die beiden Katheten; die 3 andern Stücke danach zu bestimmen.

Gegeben a, b ; gesucht α, β, c

$$1. \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad (\S. 23. 1.)$$

$$2. \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \quad (\S. 23. 1.)$$

$$3. c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\S. 23. 4.)$$

Der Ausdruck 3. ist nur dann zur Rechnung bequem, wenn a und b kleine Zahlen sind; ist das nicht der Fall, so ist er zur Rechnung sehr unbequem, da er nicht zur logarithmischen Rechnung geschikt ist; man kann ihn jedoch zweckmäßig umformen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} c &= a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \\ &= a \sec \beta \\ &= \frac{a}{\cos \beta} \end{aligned}$$

Man berechne also zunächst nach (2) den Winkel β und dann nach dieser Formel (d. h. nach §. 25. 2.) die Hypotenuse c .

B. Das Dreieck überhaupt.

§. 29. Ein Dreieck ist im Allgemeinen bestimmt durch 3 von einander unabhängige seiner 6 Bestimmungsstücke. Es besteht also zwischen je 3 von einander unabhängigen und jedem 4ten Stück, oder kurz, zwischen je 4 Stücken des Dreiecks eine Abhängigkeit; nur können unter diesen 4 Stücken nicht 3 Winkel sein, da je 2 derselben den 3ten vollständig und ohne irgend eine Beziehung zu einer Seite bestimmen. Es besteht demnach eine Abhängigkeit

1. Zwischen 2 Seiten und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln.
2. Zwischen 2 Seiten, dem eingeschlossen, und dem einer von beiden Seiten gegenüber liegenden Winkel; oder: Zwischen 4 auf einander folgenden Stücken.
3. Zwischen 3 Seiten und 1 Winkel.

Bezeichnet man die Seiten eines Dreiecks mit a, b, c ; die gegen-

überliegenden Winkel resp. mit α, β, γ , so lassen sich die 3 Abhängigkeiten folgendermaßen durch Gleichungen darstellen.

1. Abhängigkeit zwischen 2 Seiten und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln.

Man fälle von einem Eckpunkte, z. B. von γ ein Perpendikel auf die gegenüberliegende Seite, so ist dieses sowohl $= b \sin \alpha$, als auch $= a \sin \beta$. Man hat also

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

Ebenso

$$a \sin \gamma = c \sin \alpha$$

$$b \sin \gamma = c \sin \beta$$

Oder in folgender Form

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

In Worten: Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Oder in folgender Form:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

In Worten: Das Verhältniß einer Seite zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels ist für alle 3 Seiten dasselbe.

2. Abhängigkeit zwischen 4 auf einander folgenden Stücken.

Vier auf einander folgende Stücke des Dreiecks sind z. B. a, γ, b, α . Um die Abhängigkeit zwischen ihnen durch eine Gleichung darzustellen, setze man in der Gleichung

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

$\sin(\alpha + \gamma)$ an die Stelle von $\sin \beta$; denn $\sin \beta = \sin(\pi - \beta) = \sin(\alpha + \gamma)$

$$a \sin(\alpha + \gamma) = b \sin \alpha$$

$$a \sin \alpha \cos \gamma + a \cos \alpha \sin \gamma = b \sin \alpha \quad (\S. 10.)$$

Dividirt man durch $\cos \alpha$, so erhält man

$$a \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma + a \sin \gamma = b \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \beta}{c - a \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha} = \frac{b \sin \gamma}{a - b \cos \gamma}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{c \sin \alpha}{b - c \cos \alpha} = \frac{c \sin \beta}{a - c \cos \beta}$$

3. Abhängigkeit zwischen 3 Seiten und 1 Winkel.
Aus Plan. §. 48. ergibt sich für jedes Dreieck

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach den darin vorkommenden Größen werden die Dreiecksaufgaben, welche bei ausschließlicher Betrachtung der Seiten und Winkel auftreten können, gelöst.

Aufgaben vom Dreieck.

§. 30. Es seien gegeben: 1 Seite und 2 Winkel; die andern Seiten zu berechnen.

Da durch 2 Winkel der 3te durch die einfachste Rechnung gegeben ist, so soll kein Unterschied gemacht werden, welche 2 der 3 Winkel gegeben sind; oder vielmehr, sie sollen alle 3 als gegeben betrachtet werden.

Es sei gegeben a und α, β, γ so ist

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \quad (\S. 29. 1.)$$

§. 31. Es seien gegeben: 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel; die 3te Seite und die beiden andern Winkel zu berechnen.

Gegeben a, b, γ ; gesucht 1. c ; 2. α, β .

1. Nach §. 29. 3. ist

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

Die Aufgabe ist dadurch gelöst; jedoch in einer Weise, die zur logarithmischen Rechnung sehr ungeeignet ist. Um diesem Mangel abzuhelpen, sind 2 verschiedene Umformungen sehr zweckmäßig.

Erste Umformung.

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab - 2ab(1 + \cos \gamma)} \\ &= \sqrt{(a+b)^2 - 4ab \cos^2 \frac{1}{2} \gamma} \quad (\S. 16. 2.) \\ &= (a+b) \sqrt{1 - \frac{4ab \cos^2 \frac{1}{2} \gamma}{(a+b)^2}} \end{aligned}$$

Der Bruch $\frac{4ab \cos^2 \frac{1}{2} \gamma}{(a+b)^2}$ ist immer ein ächter, denn $(a+b)^2$ ist immer $> 4ab$, da $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ immer positiv ist; $\cos^2 \frac{1}{2} \gamma$ ist < 1 ; also giebt es immer einen spitzen Winkel φ , welcher vollständig bestimmt ist durch die Gleichung

$$\sin \varphi = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \gamma}{a+b} \sqrt{ab}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} c &= (a+b) \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \\ &= (a+b) \cos \varphi \end{aligned}$$

Die Rechnung ist so anzulegen, daß zunächst der Winkel φ nach seiner Bestimmungsgleichung, und dann c durch die letzte Gleichung zu berechnen ist.

Zweite Umformung.

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 2ab(1 - \cos \gamma)} \\ &= \sqrt{(a-b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma} \quad (\S. 16. 2.) \end{aligned}$$

$$= (a-b) \sqrt{1 + \frac{4ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}{(a-b)^2}}$$

Es giebt immer einen spitzen Winkel φ , welcher vollständig bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma}{a-b} \sqrt{ab}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} c &= (a-b) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \\ &= \pm (a-b) \sec \varphi \\ &= \pm \frac{a-b}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

Das obere Zeichen gilt, wenn $a > b$; das untere, wenn $a < b$ ist. Diese Auflösung wird illusorisch, wenn $a = b$ ist.

2. In §. 29. 2. finden sich die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \gamma}{a - b \cos \gamma}$$

durch welche die vorliegenden Aufgaben gelöst sind. Die Ausdrücke sind jedoch sehr ungeeignet zur logarithmischen Rechnung, und sie gestatten auch keine Umformung, welche sie dazu geschickt machte. Es ist deshalb ein anderer Weg einzuschlagen.

Da der Winkel γ gegeben ist, so ist auch $\alpha + \beta$ gegeben; wenn also $\alpha - \beta$ aus den gegebenen Größen gefunden werden kann, so ist α und β selbst gefunden. — Es ist nach §. 29. 1.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta)} \quad (\S. 17. 1.)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = 0$$

Diese Auflösung ist zur logarithmischen Rechnung vollkommen geeignet.

§. 32. Es seien gegeben: 2 Seiten und der Winkel, welcher einer von beiden gegenüberliegt; die andern Stücke zu berechnen.

Gegeben a, b, α ; gesucht 1. β ; 2. c ; 3. γ .

1. Nach §. 29. 1. ist

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

Hieraus ergibt sich, daß die Aufgabe nur dann möglich ist, wenn $a > b \sin \alpha$ (Vgl. Plan. §. 23. 3.) Die weitere Bedingung, daß, wenn α ein stumpfer Winkel ist, $a > b$ sein muß, wird durch diese Gleichung nicht ausgesprochen, da nur $\sin \alpha$ vorkommt, und $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$. Ferner: da durch diese Gleichung $\sin \beta$ gegeben ist, so bleibt dadurch noch eine Zweideutigkeit über β , indem sowohl ein spitzer wie ein stumpfer Winkel β dieser Gleichung entspricht. Anderweit ist aber bekannt, daß, wenn $a > b$ ist, β spitz sein muß. Ist aber $a < b$, und sind gleichzeitig die Bedingungen der Möglichkeit erfüllt, d. h. ist $a > b \sin \alpha$ und α spitz, so giebt es 2 Dreiecke, deren Winkel β sich bekanntlich zu π ergänzen.

2. Nach §. 29. 3. ist

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2 - b^2$$

$$c = b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \alpha}$$

$$= b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$$

Zunächst ergibt sich hieraus, daß die Aufgabe nur dann möglich ist, wenn $a > b \sin \alpha$, übereinstimmend mit dem Vorigen. Ferner ergeben sich aber aus dieser Gleichung auch die andern unter 1. aufgeführten Bestimmungen. — Nämlich: Wenn α ein stumpfer Winkel ist, so ist $b \cos \alpha$ negativ; es ist also nur dann ein positiver Werth für c vorhanden (und ein solcher kann allein in Betracht kommen) wenn $\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}$ oder $\sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \alpha} > b \cos \alpha$ ist, d. h. wenn $a > b$ ist; und in diesem Falle ist 1 Werth positiv. Ist aber α ein spitzer Winkel, so wird nur 1 Werth positiv sein, wenn $\sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \alpha} > b \cos \alpha$, d. h. wenn $a > b$ ist; dagegen 2 Werthe positiv, wenn $\sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \alpha} < b \cos \alpha$ d. h. wenn $a < b$ ist.

So befriedigend diese Auflösung in Bezug auf die Determination der Aufgabe ist, so wenig ist sie zur logarithmischen Rechnung geeignet. Zum Behufe derselben ist es am besten, nach (1) den Winkel β zu berechnen, daraus γ durch die Gleichung $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, und endlich c durch die Gleichung

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \text{ oder } = \frac{b \sin \gamma}{\sin \beta}$$

zu berechnen.

3. Nach §. 29. 2. ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf 1 Funktion von γ aufzulösen. Die beiden vorkommenden ($\sin \gamma$ und $\cos \gamma$) müssen also zunächst auf eine zurückgeführt werden.

$$b \operatorname{tg} \alpha - a \sin \gamma = a \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}$$

$$b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + a^2 \sin^2 \gamma - 2ab \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma = a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \sin^2 \gamma)$$

$$a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin^2 \gamma - 2ab \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma = (a^2 - b^2) \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\sin^2 \gamma - 2 \frac{b}{a} \sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma = \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 \alpha}{a^2}$$

$$\sin \gamma = \frac{b}{a} \sin \alpha \cos \alpha \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \alpha + \frac{b}{a} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{a} \left\{ b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \alpha} \right\}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{a} \left\{ b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha} \right\}$$

Vgl. 2. Zur logarithmischen Rechnung ist auch dieser Ausdruck gar nicht geeignet. Man berechne zunächst den Winkel β nach (1.), und dann γ durch die Gleichung $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$.

§. 33. Es seien gegeben: die 3 Seiten eines Dreiecks; irgend einen Winkel desselben zu berechnen.

Gegeben a, b, c ; gesucht α .

Nach §. 29. 3. ist

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Dieser Ausdruck ist zur logarithmischen Rechnung nicht geeignet; man kann die Gleichung aber auf mehrfache Weise leicht so umformen, daß eine bequeme logarithmische Rechnung dadurch möglich wird.

$$A. \quad 1 + \cos \alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc} \quad (\S. 16. 2.)$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}}$$

Nach dieser Gleichung ergibt sich α durch eine leichte log. Rechnung. Ueber das Vorzeichen der Wurzel kann kein Zweifel sein, da $\frac{1}{2} \alpha$ jedenfalls ein spitzer Winkel ist.

In der Gleichung liegt als Bedingung der Möglichkeit die Bedingung, daß $b+c > a$ ist; ferner die Bedingung, daß $4bc > (a+b+c)(-a+b+c)$ d. h. daß $a^2 - (b-c)^2$ positiv ist, oder daß $(a-b+c)(a+b-c)$ positiv ist, woraus hervorgeht, daß auch $a+c > b$ und $a+b > c$ sein muß: d. h. es liegt in der Gleichung die aus der Planimetrie bekannte Bedingung, daß die Summe je zweier Seiten größer als die 3te sein muß.

Wenn man $\frac{1}{2}(a+b+c)$ mit s bezeichnet, so kann man die Gleichung abkürzend schreiben

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

B. Ebenso ist

$$1 - \cos \alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} \quad (\S. 16. 1.)$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Ueber das Vorzeichen der Wurzel, und darüber, ob der zu berechnende Winkel spitz oder stumpf ist, kann auch hier keine Zweideutigkeit bestehen, da $\frac{1}{2} \alpha$ nothwendig ein spitzer Winkel ist. — Aus dieser Gleichung ergibt sich dieselbe Determination wie bei A.

C. Aus A. und B. zusammen ergibt sich auf Grund des §. 12. 1.

$$\sin \alpha = \frac{1}{2bc} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Auch hier kann über das Vorzeichen der Wurzel keine Zweideutigkeit bestehen, da $\alpha < \pi$ ist; darüber ob α ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist, läßt diese Gleichung dann Zweifel, wenn α die größte Seite des Dreiecks ist. — Auch aus dieser Gleichung ergibt sich dieselbe Determination wie bei A.

§. 34. Vom Flächeninhalt des Dreiecks.

Die Maaßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks ist in der Planimetrie dargestellt durch die Maaßzahlen der Grundlinie und der Höhe

$$J = \frac{1}{2} ah.$$

Da aber $h = b \sin \gamma$ ist, so ergibt sich

$$J = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Nach Maaßgabe der abgehandelten Aufgaben erhält man entsprechend folgende Ausdrücke:

$$1. \quad J = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} \quad (\S. 30.)$$

$$2. \quad J = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$3. \quad J = \frac{1}{2} b \sin \alpha \{ b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha} \} \quad (\S. 32. 3.)$$

$$4. \quad J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\S. 33.)$$

Von diesen Ausdrücken ist der dritte zur logarithmischen Rechnung nicht geeignet; doch kann man dies nach Anleitung des §. 32. 2. 3. umgehen, indem man die Rechnung auf 2 zurückführt.

§. 35. Wenn man andre zum Dreieck gehörige Linien und Winkel mit in Betracht zieht, so kann man eine unbegrenzte Reihe von Gleichungen und Aufgaben erhalten; die Aufzählung und Behandlung auch eines beschränkten Theiles derselben gehört mehr einer Aufgabensammlung als einem Lehrbuch an. Zur Probe, und als Anleitung zu eigener Uebung soll nur eine Reihe solcher Gleichungen hier aufgestellt werden; einige dieser Gleichungen haben überdies besondere Wichtigkeit.

Fig. 11. Es seien gegeben: der Radius des umschriebenen Kreises r , und 2 Winkel, und somit alle 3 Winkel desselben α, β, γ ; es sollen nach diesen berechnet werden

1. Die Seiten a, b, c .
2. Die zugehörigen Höhen e, f, g .
3. Die oberen (d. h. die nach den Ecken zu liegenden) Abschnitte der Höhen e', f', g' .
4. Die unteren Abschnitte der Höhen e'', f'', g'' .
5. Die durch die Höhen gebildeten Seitenabschnitte $\alpha_1 \beta, \alpha_1 \gamma; \beta_1 \alpha, \beta_1 \gamma; \gamma_1 \alpha, \gamma_1 \beta$.
6. Die Seiten des Dreiecks $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$.
7. Die Radien der Berührungskreise des Dreiecks $\alpha \beta \gamma$, wobei der Radius des innern Berührungskreises mit ρ , die äußeren über a, b, c liegenden resp. mit $\rho_1 \rho_2 \rho_3$ bezeichnet werden sollen.

8. Der Umfang U des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$.

9—12. Die durch die betreffenden Linien gebildeten Flächen.

Auflösung.

$$1. \quad a = 2r \sin \alpha; \quad b = 2r \sin \beta; \quad c = 2r \sin \gamma$$

$$2. \quad e = 2r \sin \beta \sin \gamma; \quad f = 2r \sin \alpha \sin \gamma; \quad g = 2r \sin \alpha \sin \beta$$

$$3. \quad e' = 2r \cos \alpha; \quad f' = 2r \cos \beta; \quad g' = 2r \cos \gamma$$

$$4. \quad e'' = 2r \cos \beta \cos \gamma; \quad f'' = 2r \cos \alpha \cos \gamma; \quad g'' = 2r \cos \alpha \cos \beta$$

$$5. \quad \alpha_1 \beta = 2r \sin \gamma \cos \beta; \quad \alpha_1 \gamma = 2r \sin \beta \cos \gamma$$

$$\beta_1 \alpha = 2r \sin \gamma \cos \alpha; \quad \beta_1 \gamma = 2r \sin \alpha \cos \gamma$$

$$\gamma_1 \alpha = 2r \sin \beta \cos \alpha; \quad \gamma_1 \beta = 2r \sin \alpha \cos \beta$$

$$6. \quad \alpha_1 \beta_1 = 2r \sin \gamma \cos \gamma; \quad \beta_1 \gamma_1 = 2r \sin \alpha \cos \alpha; \quad \alpha_1 \gamma_1 = 2r \sin \beta \cos \beta$$

$$7. \quad \rho = 4r \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma$$

$$\rho_1 = 4r \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

$$\rho_2 = 4r \cos \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

$$\rho_3 = 4r \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma$$

$$8. \quad U = 8r \cos \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \gamma$$

$$9. \quad \Delta \alpha \beta \gamma = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$10. \quad \Delta \alpha \circ \beta = 2r^2 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$$

$$\Delta \alpha \circ \gamma = 2r^2 \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$\Delta \beta \circ \gamma = 2r^2 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

$$11. \quad \Delta \alpha_1 \circ \beta_1 = r^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cdot \sin 2\gamma$$

$$\Delta \alpha_1 \circ \gamma_1 = r^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cdot \sin 2\beta$$

$$\Delta \beta_1 \circ \gamma_1 = r^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cdot \sin 2\alpha$$

$$12. \quad \Delta \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma.$$

Die Aufstellung solcher Tabellen, in welchen eine Reihe von Linien, Winkeln und Flächenstücken eines Dreiecks durch 3 derselben ausgedrückt wird, sowie die Ableitung vieler Folgerungen aus denselben, ist eine sehr angemessene Übung für Anfänger.

§. 36. Die Hauptaufgabe der Polygonometrie ist die Berechnung des Inhaltes eines Polygons aus seinen Seiten und Winkeln. Ein Polygon von n Seiten ist zwar durch $2n - 3$ Stücke (Seiten und Winkel) im Allgemeinen bestimmt, und es ist demnach möglich, auch den Inhalt durch $2n - 3$ Stücke auszudrücken; doch ist es angemessener ihn durch sämtliche $2n$ Bestimmungsstücke darzustellen, wie es im Folgenden geschieht. Die Abhängigkeiten zwischen den $2n$ Stücken lassen sich dann durch 3 Gleichungen darstellen, von welchen eine ausdrückt, daß die Summe der inneren Winkel $= (n - 2) \pi$ ist, die beiden andern im Laufe der folgenden Entwicklung auftreten.

Zur Auflösung der Hauptaufgabe sind einige vorläufige Erörterungen erforderlich:

Fig. 12. 1. Um die Lage eines Punktes α in der Ebene zu fixiren, bezieht man ihn auf 2 feste gegen einander senkrechte grade Linien oX und oY , und fällt von dem Punkte α ein Perpendikel $\alpha\lambda$ auf die Linie oX . Wenn die Entfernungen $\alpha\lambda$ und $o\lambda$ gegeben sind; wenn überdies bestimmt ist, in welchem der 4 Winkel der festen Linien oX und oY der Punkt α liegt, so ist die Lage desselben vollkommen bestimmt. — Die Entfernungen $\alpha\lambda$ und $o\lambda$ nennt man die *Coordinaten* des Punktes α , und insbesondere $\alpha\lambda$ die *Ordinate* und $o\lambda$ die *Abscisse* des Punktes α . Die Linien oX und oY nennt man die *Coordinaten-Aren*, und zwar oX die *Axe der Abscissen*, oY die *Axe der Ordinaten*. Alle Abscissen sollen in Zukunft mit x , alle Ordinaten mit y bezeichnet werden.

Fig. 13. 2. Bezieht man die Eckpunkte eines Vielecks, welche in ihrer natürlichen Folge mit den Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ (in Fig. 13. ist $n=6$) bezeichnet sein mögen, auf 2 rechtwinklige Coordinatenaren oX und oY , welche solche Lage haben, daß sämtliche Punkte des Polygons in demselben Winkel der Aren liegen, so ist das Vieleck in allen seinen Theilen durch die Coordinaten der Eckpunkte vollständig bestimmt. Die Ordinaten mögen, den Nummern der Eckpunkte entsprechend, mit $y_1, y_2, \dots, y_n$, die Abscissen mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet sein, so ist offenbar

$$J = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + \dots + \frac{1}{2}(y_n + y_1)(x_n - x_1)$$

Diese Gleichung bleibt bestehen, wenn man statt des hier mit 1 bezeichneten Eckpunktes irgend einen andern mit 1 bezeichnet, und dann in derselben Reihenfolge herum die folgenden mit den folgenden Ziffern; wenn man jedoch in entgegengesetzter Reihenfolge herumzählt, muß das Vorzeichen der rechten Seite in das entgegengesetzte verwandelt werden. Ferner bleibt die Gleichung auch dann richtig, wenn nicht mehr sämtliche Eckpunkte in demselben Winkel der Coordinatenaren liegen. Um dies einzusehen, braucht man nur die Abscissen-Axe parallel mit sich selbst zu verschieben, so wird dadurch zu allen y ein gleiches Stück a addirt, wo a eine positive oder negative Größe bezeichnet; dadurch aber kommt zur rechten Seite die Größe

$$a \{ (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_n - x_1) \} = 0$$

hinzu, d. h. sie bleibt unverändert; vorausgesetzt, daß man die Ordinaten zweier Punkte, die auf entgegengesetzten Seiten der Abscissen-Axe liegen, als mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet ansieht. Ebenso, wenn man die Ordinatentaxe parallel mit sich selbst verschiebt, so werden alle x um ein gleiches Stück in gleichem Sinne geändert, wodurch der Ausdruck ungeändert bleibt; doch sind auch hier die Abscissen solcher Punkte, die auf entgegengesetzten Seiten der Ordinatenaxe liegen, als mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet anzusehen. — Endlich erkennt man, daß es auf die Entwicklung und auf die Form des Resultates ohne Einfluß ist, wenn auch das Vieleck einspringende (konvexe innere) Winkel hat.

3. Es entsteht jetzt die weitere Aufgabe, den in (2) gefundenen Ausdruck auf die Seiten und Winkel des Polygons zurückzuführen, und unabhängig von den Coordinaten der Eckpunkte darzustellen.

Man bezeichne die Seiten des Polygons mit $s_1, s_2, \dots, s_n$, indem man die Seite 1₂ mit s_1 , und so fort bezeichnet. Man denke sich eine grade Linie wie in Plan. S. 17. 2. um das Polygon herumgeführt, und zwar in der Drehungsrichtung, wie die Reihenfolge der Nummern der Eckpunkte sie angiebt, so werden dadurch die sämtlichen äußern Winkel des Polygons erzeugt; kommt es dabei vor, daß die Figur einen einspringenden Winkel hat, so wird an dem Scheitel desselben eine Rückwärtsdrehung stattfinden, der betreffende äußere Winkel also, wenn er mit andern in eine Additionsverbindung tritt, als negativ angesehen werden müssen. Die so bestimmten äußern Winkel mögen mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bezeichnet werden. — Ferner, um die Winkel, welche die Seiten mit der Abscissenaxe bilden, und welche sogleich in Betracht kommen, in unzweideutigem Sinne zu nehmen, verstehe man unter dem Winkel der Seite s_m mit der Abscissen-Axe oX denjenigen Winkel, welchen man erhält, wenn man eine durch den Punkt m mit der Abscissenaxe parallel nach der Richtung oX gezogene grade Linie in derselben Drehungsrichtung wie zuvor um den Punkt m bis in die Linie s_m dreht. In diesem Sinne bezeichne man die Winkel der Seiten $s_1, s_2, \dots, s_n$ mit der Abscissenaxe mit $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$, so ist

$$\kappa_1 = \kappa_1$$

$$\kappa_2 = \kappa_1 + \alpha_2$$

$$\kappa_3 = \kappa_2 + \alpha_3 = \kappa_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\dots \dots \dots \kappa_n = \kappa_{n-1} + \alpha_n = \kappa_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \quad (II)$$

$$\kappa_n = \kappa_{n-1} + \alpha_n = \kappa_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$$

Hierdurch sind sämtliche Winkel κ mit Ausnahme eines einzigen auf Polygonwinkel zurückgeführt.

Ferner ist

$$x_1 = x_1$$

$$x_2 = x_1 + s_1 \cos \kappa_1$$

$$x_3 = x_2 + s_2 \cos \kappa_2 = x_1 + s_1 \cos \kappa_1 + s_2 \cos \kappa_2$$

$$x_n = x_{n-1} + s_{n-1} \cos \kappa_{n-1} = x_1 + s_1 \cos \kappa_1 + s_2 \cos \kappa_2 + \dots + s_{n-1} \cos \kappa_{n-1}$$

$$x_1 = x_n + s_n \cos \alpha_n = x_1 + s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + \dots + s_n \cos \alpha_n$$

Hieraus ergibt sich als allgemein gültige polygonometrische Grundgleichung

$$(I) \quad s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + \dots + s_n \cos \alpha_n = 0$$

Ebenso ist:

$$y_1 = y_1$$

$$y_2 = y_1 + s_1 \sin \alpha_1$$

$$y_3 = y_2 + s_2 \sin \alpha_2 = y_1 + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2$$

$$y_n = y_{n-1} + s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} = y_1 + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \dots + s_{n-1} \sin \alpha_{n-1}$$

$$y_1 = y_n + s_n \sin \alpha_n = y_1 + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \dots + s_n \sin \alpha_n$$

Hieraus ergibt sich als 2te allgemein gültige polygonometrische Grundgleichung

$$(II) \quad s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \dots + s_n \sin \alpha_n = 0$$

4. Durch Substitution der in (3.) für y und x gefundenen Ausdrücke in die Gleichung für J in (2.) erhält man

$$\begin{aligned} & + \dots + J = \dots \\ & - y_1 s_1 \cos \alpha_1 - \frac{1}{2} s_1 \sin \alpha_1 \cdot s_1 \cos \alpha_1 \\ & - y_1 s_2 \cos \alpha_2 - \frac{1}{2} (2 s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2) s_2 \cos \alpha_2 \\ & - y_1 s_3 \cos \alpha_3 - \frac{1}{2} (2 s_1 \sin \alpha_1 + 2 s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3) s_3 \cos \alpha_3 \\ & \quad \vdots \\ & - y_1 s_n \cos \alpha_n - \frac{1}{2} (2 s_1 \sin \alpha_1 + 2 s_2 \sin \alpha_2 + \dots + 2 s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} + s_n \sin \alpha_n) s_n \cos \alpha_n \end{aligned}$$

Nach 3. I. ist die Summe der in der ersten Vertikalreihe stehenden Glieder $= 0$. Bezeichnet man abkürzend

$$s_1 \sin \alpha_1 \text{ mit } V_1$$

$$2 s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 \text{ mit } V_2$$

$2s_1 \sin \alpha_1 + 2s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3$ mit V_3
 $2s_1 \sin \alpha_1 + 2s_2 \sin \alpha_2 + \dots + 2s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} + s_n \sin \alpha_n$ mit V_n
 so reducirt sich die obige Gleichung auf folgende

$$(III.) J = -\frac{1}{2} \{ V_1 s_1 \cos \alpha_1 + V_2 s_2 \cos \alpha_2 + \dots + V_n s_n \cos \alpha_n \}$$

5. Der Gleichung III. in (4.) steht eine entsprechende zur Seite. Neben der in (2.) entwickelten Gleichung hat man nämlich aus ganz gleichen Gründen

$$J = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_1 - y_2) - \frac{1}{2}(x_2 + x_3)(y_2 - y_3) - \dots - \frac{1}{2}(x_n + x_1)(y_n - y_1)$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch die Substitution der in (3.) entwickelten Werthe für x und y

$$J = \begin{cases} +x_1 s_1 \sin \alpha_1 + \frac{1}{2} s_1 \cos \alpha_1 \cdot s_1 \sin \alpha_1 \\ +x_1 s_2 \sin \alpha_2 + \frac{1}{2} \{ 2s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 \} s_2 \sin \alpha_2 \\ +x_1 s_3 \sin \alpha_3 + \frac{1}{2} \{ 2s_1 \cos \alpha_1 + 2s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3 \} s_3 \sin \alpha_3 \\ \vdots \\ +x_1 s_n \sin \alpha_n + \frac{1}{2} \{ 2s_1 \cos \alpha_1 + 2s_2 \cos \alpha_2 + \dots + 2s_{n-1} \cos \alpha_{n-1} + s_n \cos \alpha_n \} s_n \sin \alpha_n \end{cases}$$

Auch hier ist die Summe der Glieder der ersten Vertikalreihe nach (II.) = 0. Bezeichnet man abkürzend

$$s_1 \cos \alpha_1 \text{ mit } U_1$$

$$2s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 \text{ mit } U_2$$

$$2s_1 \cos \alpha_1 + 2s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3 \text{ mit } U_3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$2s_1 \cos \alpha_1 + 2s_2 \cos \alpha_2 + \dots + 2s_{n-1} \cos \alpha_{n-1} + s_n \cos \alpha_n \text{ mit } U_n$$

so ist

$$(IV.) J = \frac{1}{2} \{ U_1 s_1 \sin \alpha_1 + U_2 s_2 \sin \alpha_2 + \dots + U_n s_n \sin \alpha_n \}$$

Nimmt man die Abscissenaxe einer Seite des Polygons parallel

an, so reducirt sich einer der Winkel α auf 0, und die übrigen Winkel α sind reine Summen von äußern Winkeln des Polygons. Die Aufgabe ist somit vollständig gelöst, indem das Resultat unabhängig von den Coordinaten der Winkelpunkte und von den Winkeln der Seiten mit irgend welcher fremden Linie dargestellt sind.

Die obigen Entwicklungen finden häufige Anwendung in der Feldmefskunst. Da sie zu logarithmischen Rechnungen wenig geeignet sind, so wendet man häufig statt der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln Tabellen über die trigonometrischen Functionen selbst an. (III)

Die Gleichung III. in (4.) läßt eine entsprechende für Seite 279 der in (3.) entwickelten Gleichung hat man nämlich und gleich

$$1 = \frac{1}{2} (x_1 + x_2) (y_1 - y_2) - \frac{1}{2} (x_2 + x_3) (y_2 - y_3) + \dots - \frac{1}{2} (x_n + x_1) (y_n - y_1)$$

aus dieser Gleichung erhält man durch die Substitution der in (3.) entwickelten Werte für x und y

$$1 = \frac{1}{2} \left(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n \right)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ x_1 \sin \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin \alpha_1 + x_2 \sin \alpha_2 + \frac{1}{2} \sin \alpha_2 + \dots + x_n \sin \alpha_n + \frac{1}{2} \sin \alpha_n \\ &+ x_1 \sin \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin \alpha_1 + x_2 \sin \alpha_2 + \frac{1}{2} \sin \alpha_2 + \dots + x_n \sin \alpha_n + \frac{1}{2} \sin \alpha_n \end{aligned} \right\}$$

Die Summe der in (4.) entwickelten Reihe ist

$$1 = \frac{1}{2} \left(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n \right)$$

Durch Substitution der in (4.) entwickelten Reihe ist die Summe der ersten Reihe der ersten Reihe und

$$(II) = 0. \text{ Bezeichnet man abkürzend } U = \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n$$

$$2 \cos \alpha_1 + 2 \cos \alpha_2 + \dots + 2 \cos \alpha_n$$

$$2 \cos \alpha_1 + 2 \cos \alpha_2 + \dots + 2 \cos \alpha_n$$

$$+ \dots + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n$$

$$+ \dots + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n$$

$$+ \dots + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n$$

$$+ \dots + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n$$

$$+ \dots + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n$$

$$+ \dots + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n$$

$$+ \dots + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n$$

$$+ \dots + \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n$$

Drittes Capitel.

Die sphärische Trigonometrie.

§. 37. Die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie ist die Darstellung der Abhängigkeiten zwischen Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks, oder zwischen Kantenwinkeln und Flächenwinkeln einer dreiseitigen Ecke durch Gleichungen.

Unter Bestimmungsstücken eines sphärischen Dreiecks verstehen wir die 3 Seiten und die 3 Winkel desselben. — Unter Bestimmungsstücken der dreiseitigen Ecke verstehen wir die 3 Kantenwinkel und die 3 Flächenwinkel desselben.

In Zukunft soll immer nur vom sphärischen Dreieck die Rede sein; alles für dasselbe Gesagte läßt sich unmittelbar auf die dreiseitige Ecke übertragen.

§. 38. Ein sphärisches Dreieck ist im Allgemeinen durch 3 seiner 6 Bestimmungsstücke bestimmt. Es besteht also zwischen je 3 dieser Stücke und jedem 4ten, oder kurz, zwischen je 4 dieser Stücke eine Abhängigkeit. Es besteht demnach eine Abhängigkeit

1. Zwischen 2 Seiten und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln.
2. Zwischen 3 Seiten und 1 Winkel.
3. Zwischen 3 Winkeln und 1 Seite.
4. Zwischen 4 auf einander folgenden Stücken; d. h. zwischen 2 Seiten, dem eingeschlossenen und dem einer von beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel, oder, was dasselbe ist, zwischen 2 Winkeln, der eingeschlossenen und der einem von beiden Winkeln gegenüberliegenden Seite.

Die 3 Seiten eines sphärischen Dreiecks sollen immer mit a, b, c , die 3 Winkel mit α, β, γ bezeichnet werden.

1. Abhängigkeit zwischen 2 Seiten und den gegenüberliegenden Winkeln.

Aus Ster. §. 17. A. 1. ergibt sich bei gleicher Bezeichnung, wie dort

$$\frac{AC}{AS} = \sin b \quad \frac{AB}{AS} = \sin c$$

$$\frac{AP}{AB} = \sin \beta \quad \frac{AP}{AC} = \sin \gamma$$

folglich ist

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Ebenso

$$\frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}; \quad \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

In Worten: Die Sinus zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.

Oder:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \quad (I.)$$

In Worten: Das Verhältniß des Sinus einer Seite eines sphärischen Dreiecks zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels ist für alle 3 Seiten dasselbe.

2. Abhängigkeit zwischen 3 Seiten und 1 Winkel eines sphärischen Dreiecks.

Aus Ster. §. 19. I. 1. Fig. 2. ergibt sich in Verbindung mit Trig. §. 29. 3.

$$\begin{aligned} BC^2 &= BS^2 + CS^2 - 2 BS \cdot CS \cos \alpha \\ &= BA^2 + CA^2 - 2 BA \cdot CA \cos \alpha \end{aligned}$$

Es ist aber

$$BS = \frac{AS}{\cos c}; \quad CS = \frac{AS}{\cos b}$$

$$BA = AS \operatorname{tg} c; \quad CA = AS \operatorname{tg} b$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke erhält man

$$\frac{1}{\cos^2 c} + \frac{1}{\cos^2 b} - \frac{2 \cos \alpha}{\cos b \cos c} = \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos \alpha$$

$$(\sec^2 c - \operatorname{tg}^2 c) + (\sec^2 b - \operatorname{tg}^2 b) = \frac{2 \cos \alpha}{\cos b \cos c} - 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos \alpha$$

$$1 = \frac{\cos \alpha}{\cos b \cos c} - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \cos b \cos c &= \cos a - \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \text{Ebenso} \quad \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned} \quad (II.)$$

3. Abhängigkeit zwischen 3 Winkeln und 1 Seite eines sphärischen Dreiecks.

Durch Berücksichtigung des Polardreiecks ergibt sich aus den Gleichungen II.

$$\begin{aligned} -\cos \alpha &= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a \\ -\cos \beta &= \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha \cos b \\ -\cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c \end{aligned} \quad (III.)$$

4. Abhängigkeit zwischen 4 aufeinander folgenden Stücken eines sphärischen Dreiecks.

Wenn man die erste der Gleichungen (II.) mit $\cos c$ multiplicirt, und die Stellung der Glieder ändert, so erhält man

$$\cos b \cos^2 c = \cos a \cos c - \sin b \sin c \cos c \cos \alpha$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der zweiten der Gleichungen (II.) so erhält man

$$\begin{aligned} \cos b \sin^2 c &= \sin c \{ \sin a \cos \beta + \sin b \cos c \cos \alpha \} \\ \cos b \sin c &= \sin a \cos \beta + \sin b \cos c \cos \alpha \end{aligned}$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\sin b$, so geht sie über in

$$\cotg b \sin c = \frac{\sin a}{\sin b} \cos \beta + \cos c \cos \alpha$$

Setzt man nach I. an die Stelle von $\frac{\sin a}{\sin b}$ das gleiche $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ so erhält man

$$\begin{aligned} \cotg b \sin c &= \sin \alpha \cotg \beta + \cos c \cos \alpha \\ \cos c \cos \alpha &= \cotg b \sin c - \cotg \beta \sin \alpha \\ \text{Ebenso} \quad \cos c \cos \beta &= \cotg a \sin c - \cotg \alpha \sin \beta \\ \cos b \cos \alpha &= \cotg c \sin b - \cotg \gamma \sin \alpha \\ \cos b \cos \gamma &= \cotg a \sin b - \cotg \alpha \sin \gamma \\ \cos a \cos \gamma &= \cotg b \sin a - \cotg \beta \sin \gamma \\ \cos a \cos \beta &= \cotg c \sin a - \cotg \gamma \sin \beta \end{aligned} \quad (IV.)$$

In Worten: Das Produkt der Cosinus der beiden eingeschlossenen Stücke ist gleich dem Produkt der Cotangente der äußeren Seite mit dem Sinus der eingeschlossenen Seite minus dem Produkt der Cotangente des äußeren Winkels mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Die Gleichungen (IV.) lassen sich in analoger Weise aus III. entwickeln, wie sie aus II. entwickelt sind; oder, was dasselbe ist, durch Berücksichtigung des Polardreiecks für diese 6 Gleichungen (IV.) erhält man dieselben Gleichungen wieder.

§. 39. Die Neper'schen und die Gauss'schen Analogien. Wenn man die Seiten und Winkel zu Summen und Differenzen verbindet, so erhält man noch andere Gruppen von je 4 Winkelgrößen des sphärischen Dreiecks, deren Abhängigkeiten man durch Gleichungen darstellen kann. Es giebt 2 solche Gruppen von Gleichungen, welche besondere Wichtigkeit haben; es sind die oben genannten.

1. Die Neper'schen Analogien.

In §. 38. 4. kommt die Gleichung vor

$$\cos b \sin c = \sin a \cos \beta + \sin b \cos c \cos \alpha$$

Oder $\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha$

Dieselbe Abhängigkeit besteht natürlich auch für die andern Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks, welche dieselbe gegenseitige Lage haben; man erhält deshalb eine entsprechende Gleichung, indem man b mit c und gleichzeitig β mit γ gegenseitig vertauscht. Demnach ist

$$\sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man

$$\sin a (\cos \beta + \cos \gamma) = (1 - \cos \alpha) \sin (b + c) \quad (m)$$

Aus §. 38. 1. ergibt sich

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\sin b + \sin c}{\sin \beta + \sin \gamma} = \frac{\sin b - \sin c}{\sin \beta - \sin \gamma}$$

Folglich ist

$$\sin a (\sin \beta + \sin \gamma) = \sin \alpha (\sin b + \sin c)$$

$$\sin a (\sin \beta - \sin \gamma) = \sin \alpha (\sin b - \sin c)$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen durch die Gleichung (m), so erhält man

$$\frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{\sin b + \sin c}{\sin (b + c)}$$

$$\frac{\sin \beta - \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{\sin b - \sin c}{\sin (b + c)}$$

Wendet man hierauf §. 17. 3. 4; ferner §. 12. 1; §. 16. 2; §. 15. 1. 2. an, so erhält man

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta + \gamma) = \cotg \frac{1}{2} \alpha \frac{\cos \frac{1}{2} (b - c)}{\cos \frac{1}{2} (b + c)} \quad (A)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta - \gamma) = \cotg \frac{1}{2} \alpha \frac{\sin \frac{1}{2} (b - c)}{\sin \frac{1}{2} (b + c)} \quad (B)$$

Hieraus erhält man durch Berücksichtigung des Polardreiecks

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b + c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma)}{\cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma)} \quad (C)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b-c) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta-\gamma)}{\sin \frac{1}{2} (\beta+\gamma)} \quad (D)$$

Diese 4 Formeln heißen: die Neper'schen Analogien. Die durch sie dargestellten Abhängigkeiten bestehen natürlich in gleicher Weise zwischen andern Seiten und Winkeln des sphärischen Dreiecks, welche dieselbe gegenseitige Lage haben.

2. Die Gauss'schen Analogien.

Die erste der Gleichungen II. in §. 38. läßt sich folgendermaßen schreiben (§. 3. und §. 12. 2.)

$$\cos a = \cos b \cos c (\cos^2 \frac{1}{2} \alpha + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha) + \sin b \sin c (\cos^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha)$$

folglich

$$\cos a = \cos (b+c) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + \cos (b-c) \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

Verbindet man diese Gleichung durch Subtraktion und durch Addition mit der Gleichung

$$1 = \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

so erhält man die beiden Gleichungen

$$1 - \cos a = \{ 1 - \cos (b+c) \} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + \{ 1 - \cos (b-c) \} \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

$$1 + \cos a = \{ 1 + \cos (b+c) \} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + \{ 1 + \cos (b-c) \} \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

und aus diesen nach §. 16. 2.

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \sin^2 \frac{1}{2} (b+c) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + \sin^2 \frac{1}{2} (b-c) \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \cos^2 \frac{1}{2} (b+c) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha + \cos^2 \frac{1}{2} (b-c) \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich in folgende umformen:

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \sin^2 \frac{1}{2} (b+c) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \left\{ 1 + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (b-c)}{\sin^2 \frac{1}{2} (b+c)} \cotg^2 \frac{1}{2} \alpha \right\}$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \cos^2 \frac{1}{2} (b+c) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \left\{ 1 + \frac{\cos^2 \frac{1}{2} (b-c)}{\cos^2 \frac{1}{2} (b+c)} \cotg^2 \frac{1}{2} \alpha \right\}$$

Wendet man hierauf die beiden ersten Neper'schen Analogien an, so erhält man

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \sin^2 \frac{1}{2} (b+c) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \{ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} (\beta-\gamma) \}$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \cos^2 \frac{1}{2} (b+c) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \{ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} (\beta+\gamma) \}$$

Hieraus ergibt sich nach §. 3. 2.

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (b+c) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} (\beta-\gamma)}$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} (b+c) \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} (\beta+\gamma)}$$

Zieht man hieraus die Wurzeln, so erhält man

$$\sin \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (b+c) \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} (\beta-\gamma)} \quad (p)$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2} (b+c) \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} (\beta+\gamma)} \quad (q)$$

2 Gleichungen, welche vermöge der Art ihrer Ableitung zunächst nur für die absoluten Werthe bestehen; doch erkennt man leicht, daß auch rücksichtlich der Vorzeichen immer Gleichheit Statt findet. Denn $\sin \frac{1}{2} a$, $\cos \frac{1}{2} a$, $\sin \frac{1}{2} \alpha$, $\sin \frac{1}{2} (b+c)$ und $\cos \frac{1}{2} (\beta-\gamma)$ sind nach bekannten Eigenschaften der sphärischen Dreiecke und nach §. 2. immer positiv; und $\cos \frac{1}{2} (b+c)$ und $\cos \frac{1}{2} (\beta+\gamma)$ haben immer gleiche Vorzeichen. Denn aus den Neper'schen Analogien ergibt sich

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta-\gamma)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta+\gamma)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b-c)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (b+c)}$$

In diesen Brüchen haben die Zähler immer gleiche Vorzeichen, da $\frac{1}{2} (\beta-\gamma)$ und $\frac{1}{2} (b-c)$ immer absolut genommen $< \frac{\pi}{2}$ sind, und da $\beta-\gamma$ immer gleiches Vorzeichen mit $b-c$ hat. (Ster. §. 17.) Folglich haben auch die Nenner immer gleiche Vorzeichen; die Nenner sind aber

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (\beta+\gamma)}{\cos \frac{1}{2} (\beta+\gamma)} \text{ und } \frac{\sin \frac{1}{2} (b+c)}{\cos \frac{1}{2} (b+c)}$$

Die Zähler dieser Brüche sind aber immer positiv, da $\frac{1}{2} (b+c)$ und $\frac{1}{2} (\beta+\gamma)$ immer $< \pi$ sind, folglich haben die Nenner $\cos \frac{1}{2} (\beta+\gamma)$ und $\cos \frac{1}{2} (b+c)$ immer gleiche Vorzeichen. Die Gleichungen (p) und (q) bestehen also auch rücksichtlich der Vorzeichen.

Zu den beiden Gleichungen (p) und (q) kommen vermöge der Neper'schen Analogien noch 2 andere hinzu. Schreibt man nämlich die Gleichungen (B) und (A) so

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (\beta-\gamma)}{\cos \frac{1}{2} (\beta-\gamma)} = \frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (b-c)}{\sin \frac{1}{2} (b+c)}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (\beta+\gamma)}{\cos \frac{1}{2} (\beta+\gamma)} = \frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (b-c)}{\cos \frac{1}{2} (b+c)}$$

oder so:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (b+c) \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} (\beta-\gamma)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (b-c) \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} (\beta-\gamma)}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (b+c) \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} (\beta+\gamma)} = \frac{\cos \frac{1}{2} (b-c) \cdot \cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} (\beta+\gamma)}$$

so erhält man aus den Gleichungen (p) und (q) noch die folgenden:

$$\sin \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (b-c) \cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} (\beta-\gamma)} \quad (r)$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2} (b-c) \cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} (\beta+\gamma)} \quad (s)$$

Den 4 Gleichungen (p) (q) (r) (s) läßt sich folgende Form geben:

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\beta-\gamma)}{\sin \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2} (b+c)}{\sin \frac{1}{2} a} \quad (E)$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (\beta+\gamma)}{\sin \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\cos \frac{1}{2} (b+c)}{\cos \frac{1}{2} a} \quad (F)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (\beta-\gamma)}{\cos \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2} (b-c)}{\sin \frac{1}{2} a} \quad (G)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (\beta+\gamma)}{\cos \frac{1}{2} \alpha} = \frac{\cos \frac{1}{2} (b-c)}{\cos \frac{1}{2} a} \quad (H)$$

Diese 4 Gleichungen sind unter dem Namen der Gauss'schen Analogien bekannt. Ebenso gut, wie sie hier aus den Gleichungen II. des §. 38. abgeleitet sind, können sie auch aus den Gleichungen III. abgeleitet werden. Die durch sie dargestellten Abhängigkeiten bestehen natürlich auch zwischen den andern Seiten und Winkeln, welche dieselbe gegenseitige Lage haben.

§. 40. Die Gleichungen des §. 38. für's rechtwinklige und für's Quadrantendreieck.

1. Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck ist ein solches, in welchem 1 Winkel ein rechter ist.

Es sei $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so gehen die Gleichungen des §. 38. in folgende besondere über.

$$\text{I.} \quad \sin a = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

$$\sin b = \sin a \sin \beta; \quad \sin c = \sin a \sin \gamma.$$

$$\text{II.} \quad \cos a = \cos b \cos c.$$

Die beiden andern Formen unter §. 38. II. kommen hier nicht in Betracht.

$$\text{III.} \quad 1. \cos a = \cotg \beta \cotg \gamma$$

$$2. \cos \beta = \sin \gamma \cos b; \quad \cos \gamma = \sin \beta \cos c.$$

$$\text{IV.} \quad 1. \sin c = \tg b \cotg \beta; \quad \sin b = \tg c \cotg \gamma$$

$$2. \cotg a = \cos \beta \cotg c = \cos \gamma \cotg b.$$

Die beiden andern Formen unter §. 38. IV. kommen hier nicht in Betracht.

Jede der obigen 10 Gleichungen stellt eine Abhängigkeit zwischen 3 der 5 in Betracht zu ziehenden Stücke des rechtwinkligen Dreiecks dar. Neper hat denselben einen wörtlichen Ausdruck gegeben, nach welchem sie sehr leicht im Gedächtniß zu behalten sind.

Aus den 5 Stücken, welche, vom rechten Winkel anfangend folgendermaßen auf einander folgen

lassen sich 10 Combinationen ohne Wiederholung ohne Versetzung dritter Ordnung bilden; jede der obigen 10 Gleichungen enthält eine dieser 10 Combinationen. Dieselben sind nämlich

$$\begin{aligned} & b \gamma a; \gamma a \beta; a \beta c; \beta c b; c b \gamma \\ & b a c; \gamma \beta b; a c \gamma; \beta b a; c \gamma \beta \end{aligned}$$

Die 5 Combinationen der ersten Reihe unterscheiden sich von denen der zweiten Reihe dadurch, daß in jenen die äußeren Elemente jeder Combination in Bezug auf das mittlere anliegende sind; in dieser die äußeren Elemente jeder Combination in Bezug auf das mittlere nicht anliegende oder abgesonderte. Für jede der beiden Arten von Combinationen hat Neper eine besondere Regel ausgesprochen, mit der besondern Voraussetzung, daß in den daraus sich ergebenden Gleichungen an die Stelle jeder vorkommenden Kathete deren Complement gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung heißen die Regeln:

a. Der Cosinus des mittleren Stücks ist gleich dem Produkte aus den Cotangenten der anliegenden Stücke.

b. Der Cosinus des mittleren Stücks ist gleich dem Produkt der Sinus der abgesonderten Stücke.

Eine einfache Probe ergiebt die Uebereinstimmung dieser Regeln mit den obigen 10 Gleichungen.

2. Unter einem Quadrantendreieck versteht man ein solches, in welchem 1 Seite ein Quadrant ist.

Es sei $a = \frac{\pi}{2}$, so gehen die Gleichungen des §. 38. in folgende besondere über:

$$\text{I. } \sin a = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin b; \sin \gamma = \sin \alpha \sin c.$$

$$\text{II. } 1. - \cos \alpha = \cotg b \cotg c$$

$$2. \cos b = \sin c \cos \beta; \cos c = \sin b \cos \gamma.$$

$$\text{III. } - \cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma.$$

Die beiden andern Formen unter §. 38. III. kommen hier nicht in Betracht.

$$\text{IV. } 1. \sin \gamma = \tg \beta \cotg b; \sin \beta = \tg \gamma \cotg c$$

$$2. \cotg \alpha = - \cos b \cotg \gamma = - \cos c \cotg \beta$$

Aufgaben vom sphärischen Dreieck.

Bemerkung. Eine abgesonderte Behandlung des rechtwinkligen und des Quadrantendreiecks erscheint hier um so weniger nothwendig,

da dieselben gar keine Schwierigkeiten darbieten. Die Aufgaben vom allg. sphär. Dreieck sollen nach Maafsgabe der Congruenzsätze (Ster. §. 19.) geordnet werden.

§. 41. I. Es seien gegeben: die 3 Seiten eines sphärischen Dreiecks; es soll daraus irgend einer der Winkel berechnet werden.

Es sei gegeben a, b, c ; gesucht α .

Nach §. 38. II. ist

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

Durch diese Gleichung ist die Aufgabe gelöst, aber in einer Weise, welche für die logarithmische Rechnung nicht bequem ist. Die Gleichung läßt jedoch zweckmäßige Umformungen zu, analog denen des §. 33.

$$A. \quad 1 + \cos \alpha = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos (b+c)}{\sin b \sin c}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a+b+c) \sin \frac{1}{2} (-a+b+c)}{\sin b \sin c}$$

(Nach §. 16. 2; §. 15. 4.)

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a+b+c) \sin \frac{1}{2} (-a+b+c)}{\sin b \sin c}}$$

Bezeichnet man abkürzend $\frac{1}{2} (a+b+c)$ mit s , so hat man

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$B. \quad 1 - \cos \alpha = \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a-b+c) \sin \frac{1}{2} (a+b-c)}{\sin b \sin c}$$

(Nach §. 16. 2. und §. 15. 4.)

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (a-b+c) \sin \frac{1}{2} (a+b-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}$$

C. Durch Division ergibt sich aus A. und B.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$$

D. Durch Multiplikation erhält man nach §. 12. 1. aus A. und B.

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

Jede dieser 4 Gleichungen ist zur logarithmischen Rechnung sehr geeignet. — In keiner findet eine Zweideutigkeit rücksichtlich des Vorzeichens der Wurzel statt. — Die 3 ersten geben den gesuchten Winkel unzweideutig; die 4te läßt Zweifel zwischen 2 Supplementswinkeln. — Jede enthält vollständig als Bedingung der Möglichkeit die Bedingung, daß die Summe je zweier Seiten größer als die 3te sei (vgl. Ster. §. 15. 1.); es beweist sich dies folgendermaßen für (A.)

Die Größe unter dem Wurzelzeichen muß positiv, und muß < 1 sein.

Wegen der ersten Bedingung muß $b+c > a$ sein.

Wegen der 2ten muß

$$\sin b \sin c > \sin \frac{1}{2} (a+b+c) \sin \frac{1}{2} (-a+b+c)$$

sein; d. h. es muß

$$2 \sin b \sin c > \cos a - \cos(b+c)$$

sein; folglich muß

$$2 \sin b \sin c > \cos a - \cos b \cos c + \sin b \sin c$$

sein; d. h. $\cos a - \cos(b-c)$ muß negativ sein, oder

$$\sin \frac{1}{2} (a-b+c) \sin \frac{1}{2} (a+b-c)$$

muß positiv sein. Das ist aber nur dann der Fall, wenn beide Faktoren positiv sind; denn es ist nicht möglich, daß beide Faktoren gleichzeitig negativ sind, da nicht gleichzeitig $a-b+c$ und $a+b-c$ negativ sein können; es muß also sowohl $a+c > b$ als auch $a+b > c$ sein.

Aus ähnlichen Gründen geht dasselbe für die übrigen Gleichungen hervor.

II. Es seien gegeben: die 3 Winkel eines sphärischen Dreiecks; es soll daraus irgend eine der Seiten berechnet werden.

Es seien gegeben α, β, γ ; gesucht a .

Nach §. 38. III. ist

$$\cos a = \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}$$

Durch diese Gleichung ist die Aufgabe gelöst, aber in einer Weise, welche für die logarithmische Rechnung nicht bequem ist. Die Gleichung läßt jedoch in derselben Weise wie bei I. zweckmäßige Umformungen zu.

$$\begin{aligned} \text{A. } 1 + \cos a &= \frac{\sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \\ &= \frac{\cos \alpha + \cos (\beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} \end{aligned}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{2 \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}$$

(Nach §. 16. 2. und §. 15. 3.)

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

Bezeichnet man abkürzend $\frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma)$ mit σ , so hat man

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$\begin{aligned} \text{B. } 1 - \cos a &= \frac{\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \\ &= \frac{\cos \alpha + \cos (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} \end{aligned}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (-\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}$$

(Nach §. 16. 2. und §. 15. 3.)

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (-\alpha + \beta + \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

C. Durch Division erhält man aus A. und B.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha)}{\cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}}$$

D. Durch Multiplikation erhält man nach §. 12. 1. aus A. und B.

$$\sin a = \frac{2}{\sin \beta \sin \gamma} \sqrt{-\cos \sigma \cos (\sigma - \alpha) \cos (\sigma - \beta) \cos (\sigma - \gamma)}$$

Jede dieser 4 Gleichungen ist zur logarithmischen Rechnung geeignet. — In keiner findet eine Zweideutigkeit rücksichtlich des Vorzeichens der Wurzel statt. — Die 3 ersten geben die gesuchte Seite unzweideutig; die 4te läßt Zweifel zwischen 2 Supplementsbogen. — Jede enthält vollständig als Bedingung der Möglichkeit die Bedingung, daß die Summe je zweier Winkel minus dem dritten kleiner als π sei. (Vgl. Ster. §. 15. 2.) Es beweist sich dies folgendermaßen für (B.)

Die Größe unter dem Wurzelzeichen muß positiv und muß < 1 sein.

Wegen der ersten Bedingung muß $\cos \frac{1}{2} (-\alpha + \beta + \gamma)$ positiv sein, da $\cos \sigma$ negativ ist, $\sin \beta$ und $\sin \gamma$ aber positiv sind; also muß $-\alpha + \beta + \gamma < \pi$ sein.

Wegen der zweiten Bedingung muß

$$\sin \beta \sin \gamma > -\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (-\alpha + \beta + \gamma)$$

sein, d. h. es muß

$$2 \sin \beta \sin \gamma > -\cos \alpha - \cos (\beta + \gamma)$$

sein; folglich muß

$$2 \sin \beta \sin \gamma > -\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$$

sein, d. h. $\cos \alpha + \cos (\beta - \gamma)$ muß positiv sein; oder

$$\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma)$$

muß positiv sein; dies ist aber nur dann der Fall, wenn beide Factoren zugleich positiv sind; denn es ist nicht möglich, daß beide Factoren zugleich negativ sind, da nicht gleichzeitig $\frac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma)$ und $\frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma)$ größer als $\frac{\pi}{2}$ sein kann; denn wenn dies der Fall sein sollte, müßte $\alpha > \pi$ sein, was der Grundbedingung widerspricht, daß das Dreieck ein einfaches sein soll. Es muß also

$$\alpha - \beta + \gamma < \pi; \quad \alpha + \beta - \gamma < \pi$$

sein.

Aus ähnlichen Gründen geht dasselbe für die andern Gleichungen hervor.

§. 42. I. Es seien gegeben: 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel; es sollen daraus die beiden andern Winkel und die 3te Seite berechnet werden.

Gegeben b, c, α ; gesucht 1. β, γ ; 2. a .

1. Die beiden Winkel β und γ berechnen sich am einfachsten durch die beiden ersten Neper'schen Analogien §. 39. 1. A. und B.

2. Die dritte Seite a kann auf 2 verschiedenen Wegen gefunden werden.

Erste Auflösung. Nach §. 38. II. ist

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

Durch diese Gleichung ist die Aufgabe gelöst, jedoch in einer Weise, welche zur logarithmischen Rechnung nicht bequem ist; sie läßt sich aber auf eine dazu geeignete Form bringen.

$$\cos a = \cos b (\cos c + \operatorname{tg} b \sin c \cos \alpha)$$

Es giebt immer einen Winkel φ zwischen den Grenzen $= \frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, welcher der Gleichung

entspricht, und durch dieselbe unzweideutig bestimmt ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b (\cos c + \sin c \operatorname{tg} \varphi) \\ &= \cos b \left(\cos c + \frac{\sin c \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \\ &= \frac{\cos b \cos (c - \varphi)}{\cos \varphi}\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich a mit Leichtigkeit logarithmisch berechnen, nachdem zuvor φ durch seine Bestimmungsgleichung berechnet ist.

Zweite Auflösung. Man berechne zuerst nach 1. die Winkel β und γ , und dann durch eine der Gaussischen Analogien (§. 39. 2.) die Seite a .

II. Es seien gegeben: 2 Winkel und die eingeschlossene Seite; es sollen daraus die beiden andern Seiten und der 3te Winkel berechnet werden.

Gegeben β, γ, a ; gesucht 1. b, c ; 2. α .

1. Die beiden Seiten b und c berechnen sich am einfachsten durch die beiden letzten Neper'schen Analogien (§. 39. 1. C. D.)

2. Der dritte Winkel α kann auf 2 verschiedenen Wegen gefunden werden.

Erste Auflösung. Nach §. 38. III. ist

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Durch diese Gleichung ist die Aufgabe gelöst jedoch in einer Weise, welche zur logarithmischen Rechnung nicht bequem ist; sie läßt sich aber auf eine dazu geeignete Form bringen.

$$-\cos \alpha = \cos \beta (\cos \gamma - \operatorname{tg} \beta \sin \gamma \cos a)$$

Es giebt immer einen Winkel φ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$

und $+\frac{\pi}{2}$, welcher der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos a \operatorname{tg} \beta$$

entspricht, und durch dieselbe unzweideutig bestimmt ist.

$$\begin{aligned}-\cos \alpha &= \cos \beta (\cos \gamma - \sin \gamma \operatorname{tg} \varphi) \\ &= \cos \beta \left(\cos \gamma - \frac{\sin \gamma \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \\ &= \frac{\cos \beta \cos (\gamma + \varphi)}{\cos \varphi}\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich α mit Leichtigkeit logarithmisch berechnen, nachdem zuvor φ durch seine Bestimmungsgleichung berechnet ist.

Zweite Auflösung. Man berechne zuerst nach 1. die beiden Seiten b und c , und dann durch eine der Gauss'schen Analogien, (§. 39. 2.) den Winkel α .

§. 43. I. Es seien gegeben: 2 Seiten und der einer von beiden gegenüberliegende Winkel; es sollen daraus die andern Stücke des Dreiecks berechnet werden.

Gegeben b, c, β ; gesucht 1. γ ; 2. a ; 3. α .

1. Der Winkel γ wird nach §. 38. I. berechnet

$$\sin \gamma = \frac{\sin c \sin \beta}{\sin b}$$

Als Bedingung der Möglichkeit ergibt sich hieraus, daß

$$\sin b \geq \sin c \sin \beta$$

sein muß. Diese Bedingung enthält den Haupttheil der Bestimmungen, welche in Ster. §. 19. III. aufgestellt sind. Die weiteren dort ausgesprochenen Bedingungen lassen sich jetzt kurz folgendermaßen zusammenfassen, wenn immer vorausgesetzt wird, daß obiger Grundbedingung genügt ist.

Wenn $c = \frac{\pi}{2}$ ist, so sind 2 Dreiecke möglich, wenn b gleichzeitig mit β spitz oder stumpf ist; keins im entgegengesetzten Falle.

Wenn zugleich mit c auch $\beta = \frac{\pi}{2}$ ist, so sind unendlich viele Dreiecke möglich, wenn $b = \frac{\pi}{2}$ ist, in welchen allen dann auch $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist; keins im entgegengesetzten Falle.

Wenn $c < \frac{\pi}{2}$ ist, so ist entweder $\sin b < \sin c$ oder $\sin b > \sin c$. — Wenn $\sin b < \sin c$, so sind 2 Dreiecke möglich, wenn b gleichzeitig mit β spitz oder stumpf ist, keins, wenn das Gegentheil statt findet. — Wenn $\sin b > \sin c$, so ist immer ein Dreieck möglich; in diesem 1 Dreieck ist $\gamma > \frac{\pi}{2}$, wenn $c > \frac{\pi}{2}$ ist, und $\gamma < \frac{\pi}{2}$

wenn $c < \frac{\pi}{2}$ ist. — Die Grenze zwischen diesen beiden Fällen bildet der, daß $\sin b = \sin c$ ist; in diesem Falle existirt immer ein Grenzdreieck, in welchem b und c in einen Hauptkreis zusammen fallen: entweder so, daß sie sich decken, oder so, daß sie sich zu einem Halbkreise ergänzen, so daß also die dritte Seite a und der Winkel α entweder beide $= 0$ oder beide $= \pi$ sind. Außerdem existirt noch ein wirkliches Dreieck, wenn b gleichzeitig mit β spitz oder stumpf ist; keins, wenn das Gegentheil statt findet. — Das so eben erwähnte Grenzdreieck ist in Ster. §. 19. III. 1. nicht berücksichtigt.

2. Die Seite a läßt sich nach §. 38. II. berechnen

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

Diese Gleichung muß in Bezug auf eine Funktion von a aufgelöst werden; zu dem Ende müssen die beiden vorkommenden Funktionen, $\cos a$ und $\sin a$, auf eine zurückgeführt werden. Am angemessensten ist es, sie nach §. 12. 1. 2. auf $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a$ zurückzuführen. Dadurch erhält man

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{\sin c \cos \beta \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 c \sin^2 \beta}}{\cos b + \cos c}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich leicht die in 1. aufgestellte, aus Ster. §. 19. III. 1. genommene Determination; zur logarithmischen Rechnung ist sie jedoch keineswegs geeignet. Für dieselbe bieten sich 2 besonders bemerkenswerthe Wege dar.

Erste Auflösung. Die Gleichung

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin b \sin c \cos \beta$$

kann man schreiben

$$\cos b = \cos c (\cos a + \operatorname{tg} c \sin a \cos \beta)$$

Es giebt immer einen Winkel φ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, welcher der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} c \cos \beta$$

entspricht, und durch dieselbe unzweideutig bestimmt ist.

$$\cos b = \cos c (\cos a + \sin a \operatorname{tg} \varphi)$$

$$\cos b = \frac{\cos c \cos (a - \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$\cos (a - \varphi) = \frac{\cos b \cos \varphi}{\cos c}$$

Hieraus läßt sich mit Leichtigkeit der absolute Werth des $a - \varphi$ logarithmisch berechnen; über das Vorzeichen des $a - \varphi$ wird durch diese Gleichung Nichts entschieden; es werde der absolute Werth mit k bezeichnet, so ist $a - \varphi = \pm k$

$$a = \varphi \pm k$$

Anm. Auch aus dieser Auflösung ergibt sich die in 1. aufgestellte Determination. Die Rechnung ergibt alle möglichen Auflösungen, und die fremden, d. h. der Aufgabe nicht entsprechenden Werthe von a , welche sich ergeben, scheiden sich von selbst aus. Dasselbe gilt bei den folgenden, dieser analogen, Auflösungen.

Zweite Auflösung. Man berechne nach 1. den Winkel γ und dann nach einer der beiden letzten Neper'schen Analogieen §. 39. C. D. die Seite a . Dieselben nehmen für diesen Fall folgende Formen an

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma)}{\cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (b + c)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma)}{\sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (b - c)$$

3. Der Winkel α läßt sich nach §. 38. IV. berechnen.

$$\cos c \cos \alpha = \cotg b \sin c - \cotg \beta \sin \alpha$$

Diese Gleichung muß in Bezug auf eine Funktion von α aufgelöst werden; zu dem Ende müssen die beiden vorkommenden Funktionen, $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$, auf eine zurückgeführt werden. Am angemessensten ist es, sie nach §. 12. 1. 2. auf $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$ zurückzuführen. Dadurch erhält man

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin b \cos \beta \pm \sqrt{\sin^2 b - \sin^2 c \sin^2 \beta}}{\sin \beta \sin (b + c)}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich leicht die in 1. aufgestellte Determination; zur logarithmischen Rechnung ist sie jedoch keineswegs geeignet. Für dieselbe bieten sich 2 besonders bemerkenswerthe Wege dar.

Erste Auflösung. Die Gleichung

$$\cos c \cos \alpha = \cotg b \sin c - \cotg \beta \sin \alpha$$

läßt sich schreiben:

$$\cos \alpha + \frac{\cotg \beta}{\cos c} \sin \alpha = \cotg b \operatorname{tg} c$$

Es giebt immer einen Winkel φ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, welcher der Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cotg \beta}{\cos c}$$

entspricht, und durch dieselbe unzweideutig bestimmt ist. Demnach ist

$$\cos \alpha + \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha = \cotg b \operatorname{tg} c$$

$$\frac{\cos (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} = \cotg b \operatorname{tg} c$$

$$\cos (\alpha - \varphi) = \cotg b \operatorname{tg} c \cos \varphi$$

Hieraus ergibt sich der absolute Werth des $\alpha - \varphi$ durch eine leichte logarithmische Rechnung; über das Vorzeichen des $\alpha - \varphi$ wird durch diese Gleichung Nichts entschieden. Der absolute Werth werde mit k bezeichnet, so $\alpha - \varphi = \pm k$

$$\alpha = \varphi \pm k$$

Zweite Auflösung. Man berechne nach 1. den Winkel γ und dann nach einer der beiden ersten Neper'schen Analogien

§. 39. 1. A. B. den Winkel α . Dieselben nehmen für diesen Fall folgende Form an

$$\cotg \frac{1}{2} \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} (b+c)}{\cos \frac{1}{2} (b-c)} \tg \frac{1}{2} (\beta+\gamma)$$

$$\cotg \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} (b+c)}{\sin \frac{1}{2} (b-c)} \tg \frac{1}{2} (\beta+\gamma)$$

II. Es seien gegeben: 2 Winkel und die einem von beiden gegenüberliegende Seite; es sollen daraus die andern Stücke des Dreiecks berechnet werden.

Gegeben β, γ, b ; gesucht 1. c ; 2. α ; 3. a .

1. Die Seite c wird nach §. 38. I. berechnet.

$$\sin c = \frac{\sin \gamma \sin b}{\sin \beta}$$

Als Bedingung der Möglichkeit ergibt sich hieraus, daß

$\sin \beta \geq \sin \gamma \sin b$ sein muß. Diese Bedingung enthält den Haupttheil der Bestimmungen, welche in Ster. §. 19. III. 2. aufgestellt sind. Die weiteren dort ausgesprochenen Bedingungen lassen sich jetzt kurz folgendermaßen zusammenfassen, wenn immer vorausgesetzt wird, daß jener Grundbedingung genügt ist.

Wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, so sind 2 Dreiecke möglich, wenn β gleichzeitig mit b spitz oder stumpf ist; keins im entgegengesetzten Falle.

Wenn zugleich mit γ auch $b = \frac{\pi}{2}$ ist, so sind unendlich viele Dreiecke möglich, wenn $\beta = \frac{\pi}{2}$ ist, in welchen allen auch $c = \frac{\pi}{2}$ ist;

keins, wenn β von $\frac{\pi}{2}$ verschieden ist.

Wenn $\gamma > \frac{\pi}{2}$ ist, so ist entweder $\sin \beta < \sin \gamma$ oder $\sin \beta > \sin \gamma$. — Wenn $\sin \beta < \sin \gamma$, so sind 2 Dreiecke möglich, wenn β gleichzeitig mit b spitz oder stumpf ist; keins, wenn das Gegentheil statt findet; im Grenzfalle, wenn β oder $b = \frac{\pi}{2}$ ist, ist immer 1

Dreieck möglich, welchen Werth auch resp. b oder β haben möge. —

Wenn $\sin \beta > \sin \gamma$, so ist immer 1 Dreieck möglich; in diesem 1

Dreieck ist $c < \frac{\pi}{2}$, wenn $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ist; und $c > \frac{\pi}{2}$, wenn $\gamma >$

$\frac{\pi}{2}$ ist. — Die Grenze zwischen diesen beiden Fällen bildet der, daß

$\sin \beta = \sin \gamma$ ist; in diesem Falle existirt immer ein Grenzdreieck, in welchem β und γ entweder die beiden Zweieckswinkel, oder Nebwinkel von einander sind; so daß also der 3te Winkel α und die 3te

Seite a entweder $= \pi$ oder $= 0$ sind, und daß das Dreieck entweder in ein Zweieck oder in einen Bogen übergeht; außerdem existirt noch ein wirkliches Dreieck, wenn β gleichzeitig mit b spitz oder stumpf ist, keins, wenn das Gegentheil statt findet. — Das so eben erwähnte Grenzdreieck ist in Ster. §. 19. III. 2. nicht berücksichtigt.

2. Der Winkel α läßt sich nach §. 38. III. berechnen

$$-\cos \beta = \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha \cos b$$

Diese Gleichung muß in Bezug auf eine Function von α aufgelöst werden; zu dem Ende müssen die beiden vorkommenden Functionen, $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$, auf eine zurückgeführt werden. Am angemessensten ist es, sie nach §. 12. 1. 2. auf $\cotg \frac{1}{2} \alpha$ zurückzuführen. Dadurch erhält man (vgl. 1. 2.)

$$\cotg \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \gamma \cos b \pm \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma \sin^2 b}}{\cos \beta + \cos \gamma}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich leicht die in 1. aufgestellte, aus Ster. §. 19. III. 2. genommene Determination; zur logarithmischen Rechnung ist sie keineswegs geeignet. Für dieselbe bieten sich 2. besonders bemerkenswerthe Wege dar.

Erste Auflösung. Die Gleichung

$$-\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos b$$

kann man schreiben

$$-\cos \beta = \cos \gamma (\cos \alpha - \tg \gamma \sin \alpha \cos b)$$

Es giebt immer einen Winkel φ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, welcher der Gleichung

$$\tg \varphi = -\tg \gamma \cos b$$

entspricht und durch dieselbe unzweideutig bestimmt ist. Dann ist

$$-\cos \beta = \cos \gamma (\cos \alpha + \tg \varphi \sin \alpha)$$

$$= \frac{\cos \gamma \cos (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$$

$$\cos (\alpha - \varphi) = \frac{\cos \beta \cos \varphi}{\cos \gamma}$$

Hieraus ergibt sich durch eine einfache logarithmische Rechnung der absolute Werth des $\alpha - \varphi$; über das Vorzeichen des $\alpha - \varphi$ entscheidet diese Gleichung nicht; es werde der absolute Werth mit k bezeichnet, so ist $\alpha - \varphi = \pm k$

Zweite Auflösung. Man berechne nach 1. die Seite c , und dann nach einer der beiden ersten Neper'schen Analogien §. 39.

A. B. den Winkel α . Dieselben nehmen für diesen Fall folgende Formen an

$$\cotg \frac{1}{2} \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} (b+c)}{\cos \frac{1}{2} (b-c)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta+\gamma)$$

$$\cotg \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} (b+c)}{\sin \frac{1}{2} (b-c)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta-\gamma)$$

3. Die Seite a läßt sich nach §. 38. IV. berechnen.

$$\cos a \cos \gamma = \cotg b \sin a - \cotg \beta \sin \gamma$$

Diese Gleichung muß in Bezug auf eine Funktion von a aufgelöst werden; zu dem Ende müssen die beiden vorkommenden Funktionen, $\cos a$ und $\sin a$ auf eine zurückgeführt werden; am angemessensten ist es, sie nach §. 12. 1. 2. auf $\cotg \frac{1}{2} a$ zurückzuführen. Dadurch erhält man

$$\cotg \frac{1}{2} a = \frac{\sin \beta \cos b \pm \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma} \sin^2 b}{\sin b \sin (\beta+\gamma)}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich leicht die in 1. aufgestellte Determination; zur logarithmischen Rechnung ist sie jedoch keineswegs geeignet. Für dieselbe bieten sich 2 besonders bemerkenswerthe Wege dar.

Erste Auflösung. Die Gleichung

$$\cos a \cos \gamma = \cotg b \sin a - \cotg \beta \sin \gamma$$

läßt sich schreiben

$$\cos a - \frac{\cotg b}{\cos \gamma} \sin a = - \cotg \beta \operatorname{tg} \gamma$$

Es giebt immer einen Winkel ϕ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, welcher der Gleichung

$$\operatorname{tg} \phi = - \frac{\cotg b}{\cos \gamma}$$

entspricht und durch dieselbe unzweideutig bestimmt ist. Demnach ist

$$\cos a + \operatorname{tg} \phi \sin a = - \cotg \beta \operatorname{tg} \gamma$$

$$\frac{\cos (a-\phi)}{\cos \phi} = - \cotg \beta \operatorname{tg} \gamma$$

$$\cos (a-\phi) = - \cotg \beta \operatorname{tg} \gamma \cos \phi$$

Hieraus ergibt sich durch eine leichte logarithmische Rechnung der absolute Werth des $a-\phi$; über das Vorzeichen des $a-\phi$ wird durch diese Gleichung Nichts entschieden. Der absolute Werth werde mit k bezeichnet, so ist $a-\phi = \pm k$ also

$$a = \phi \pm k$$

Zweite Auflösung. Man berechne nach 1. die Seite c , und dann nach einer der beiden letzten Neper'schen Analogien §. 39. 1. C. D. die Seite a . Die beiden Gleichungen nehmen für diesen Fall folgende Formen an

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma)}{\cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (b + c)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma)}{\sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (b - c)$$

$$\frac{d^2 \sin^2 \gamma \sin^2 \delta - \sin^2 \delta \pm d \cos \delta \sin \gamma}{(\gamma + \delta) \sin \delta \sin \gamma} = a \operatorname{ctg} \frac{1}{2} a$$

Die Auflösung der Gleichung $\cos a \cos \gamma = \operatorname{ctg} b \sin a - \operatorname{ctg} \delta \sin \gamma$ lässt sich schreiben

$$\frac{\cos a}{\cos \gamma} = \frac{\operatorname{ctg} b \sin a}{\cos \gamma} - \operatorname{ctg} \delta \operatorname{tg} \gamma$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} b}{\cos \gamma} = \frac{\operatorname{ctg} b \sin a}{\cos \gamma \sin a} = \frac{\operatorname{ctg} b \sin a}{\cos \gamma \sin a}$$

$$\cos a + \operatorname{tg} \varphi \sin a = \operatorname{ctg} \delta \operatorname{tg} \gamma$$

$$\frac{\cos (a - \varphi)}{\cos \varphi} = \operatorname{ctg} \delta \operatorname{tg} \gamma$$

$$\cos (a - \varphi) = \operatorname{ctg} \delta \operatorname{tg} \gamma \cos \varphi$$

Notenztabelle. (C. S. 75.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000
11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691
12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352

15	144	1558	50530	548835	5082084	32831808	450081000	2120580325
11	151	1331	14041	101024	1551201	10482151	514328881	5325045001
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000
0	81	550	0201	20040	231441	4585000	43040551	382450480
8	04	215	4000	35208	505144	5002125	10555510	134515558
5	40	343	5401	10805	145040	853243	2504801	40323005
0	30	510	1500	5550	40020	550030	1050010	10055000
2	52	152	052	3152	12052	58152	300052	1023152
4	10	04	520	1054	4000	10384	02230	505144
3	0	55	81	543	550	5185	0201	10083
5	4	8	10	35	04	158	520	215
1	5	3	4	2	0	5	8	0

Spaltenreihen (C. 2. 12.)

Fig. 1.

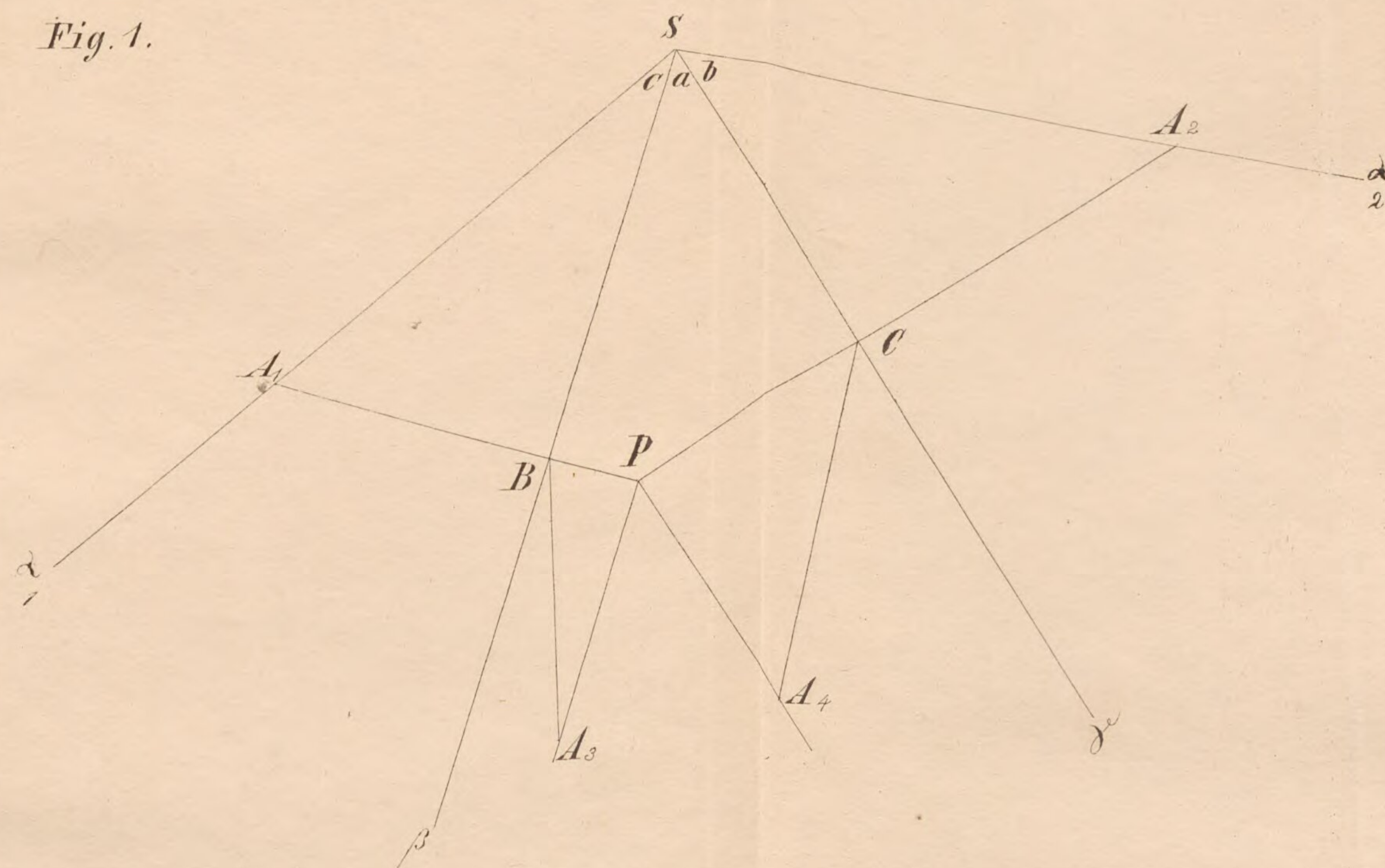


Fig. 2.

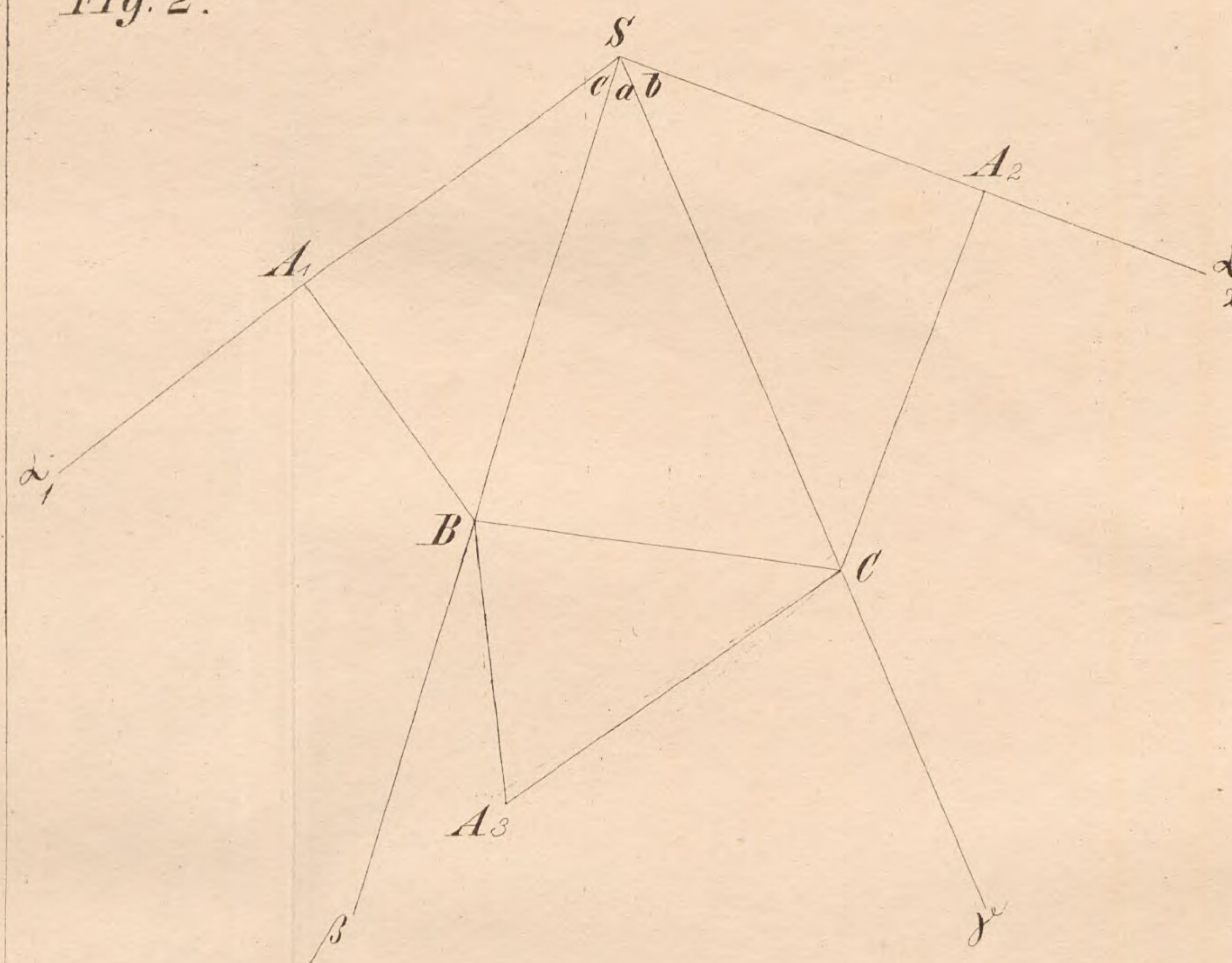


Fig. 3.

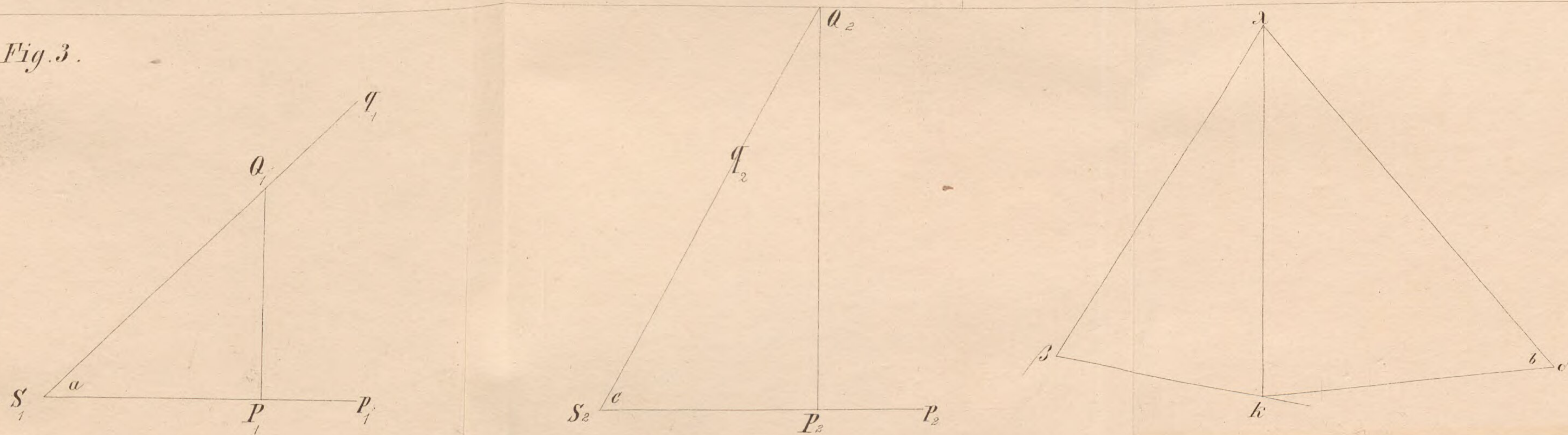


Fig. 1.

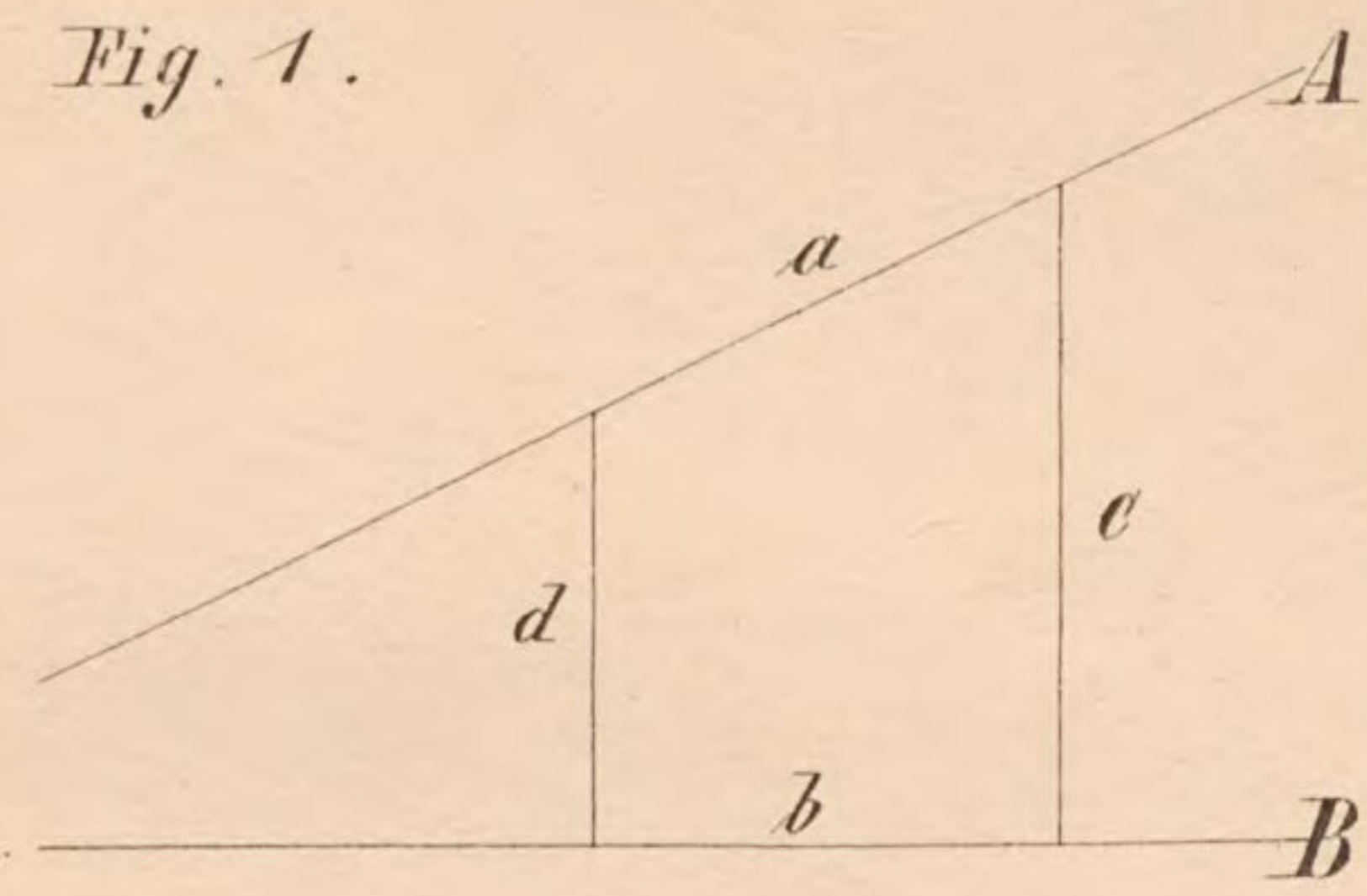


Fig. 2.

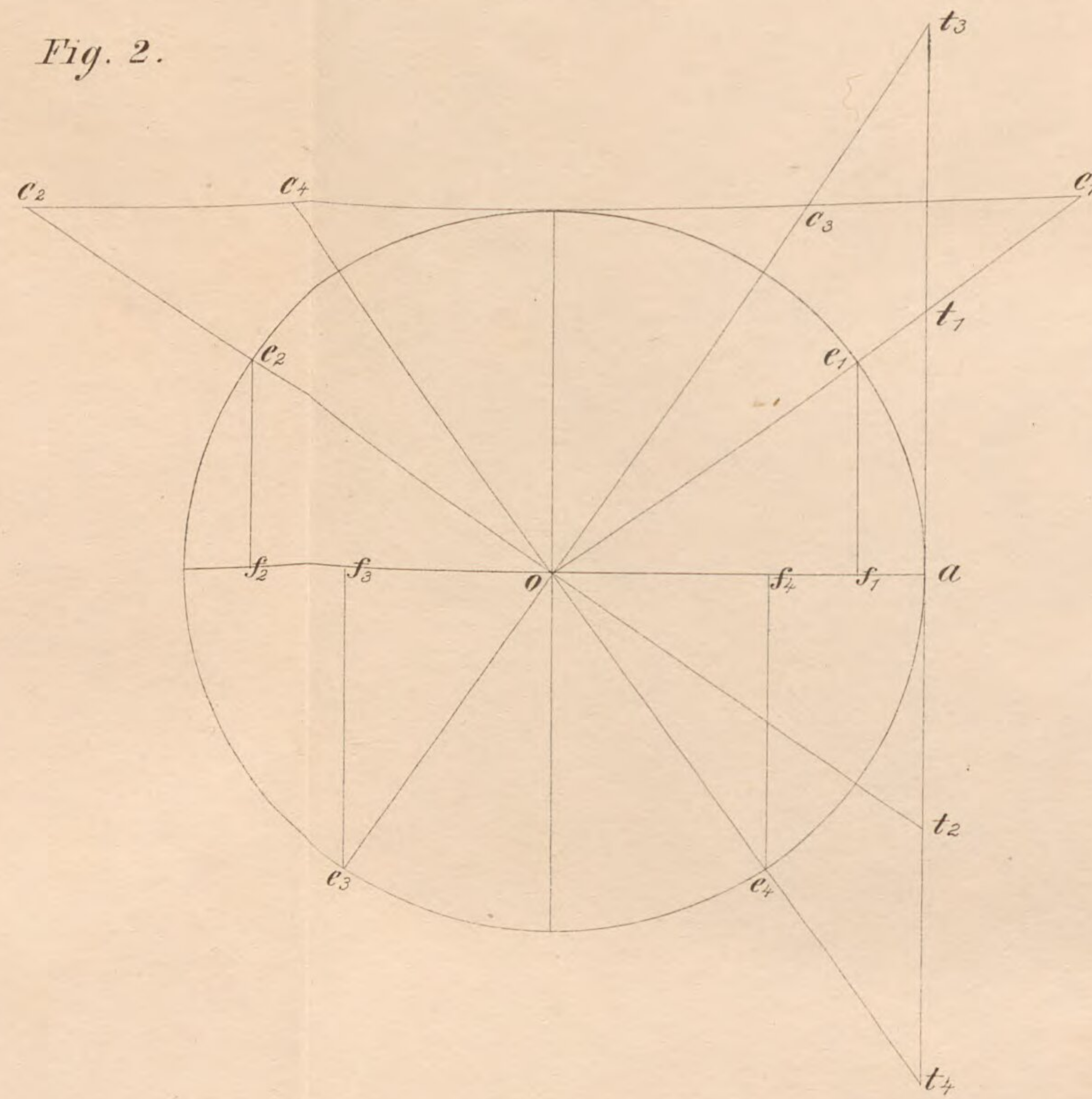


Fig. 8.

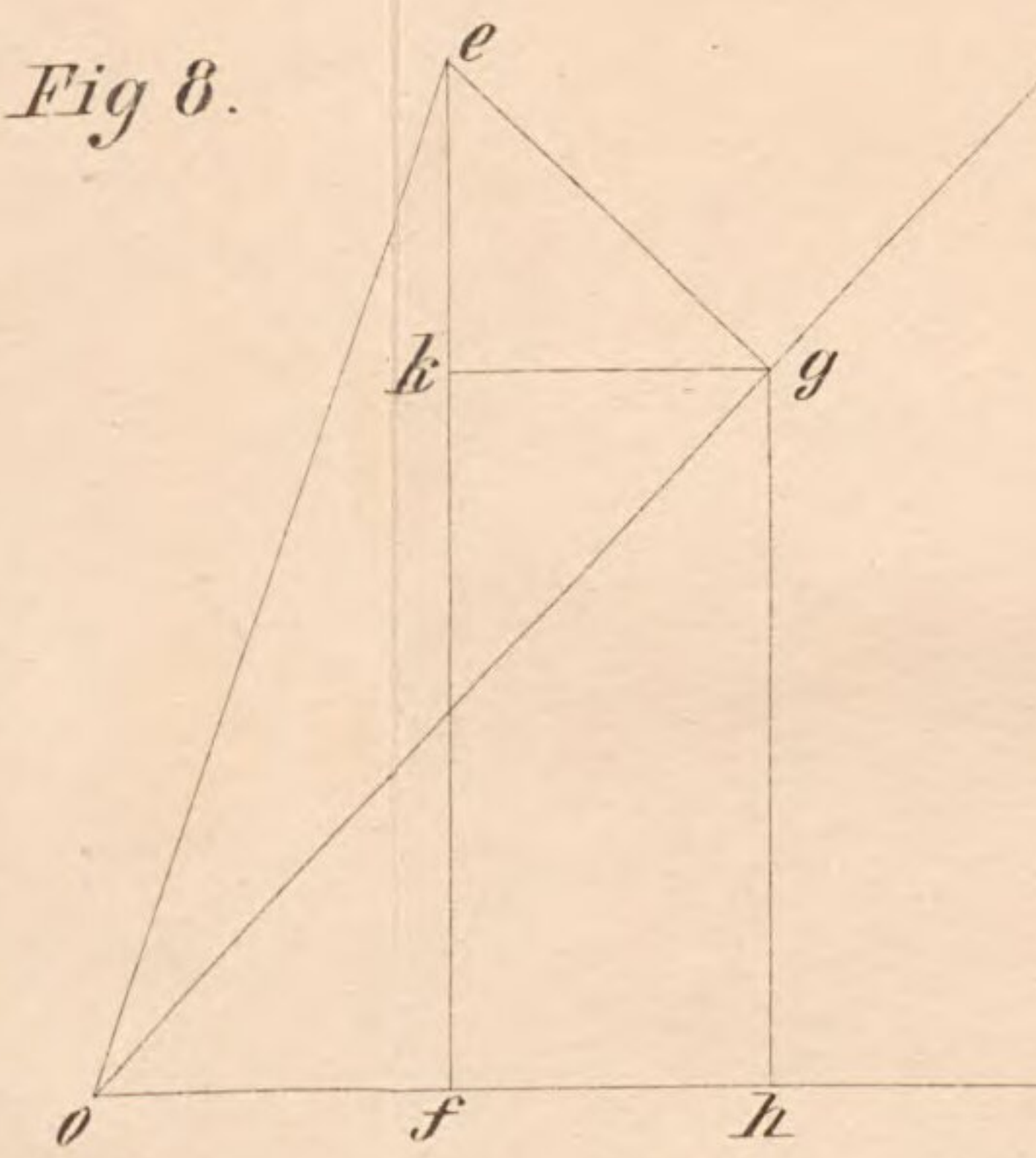


Fig. 11.

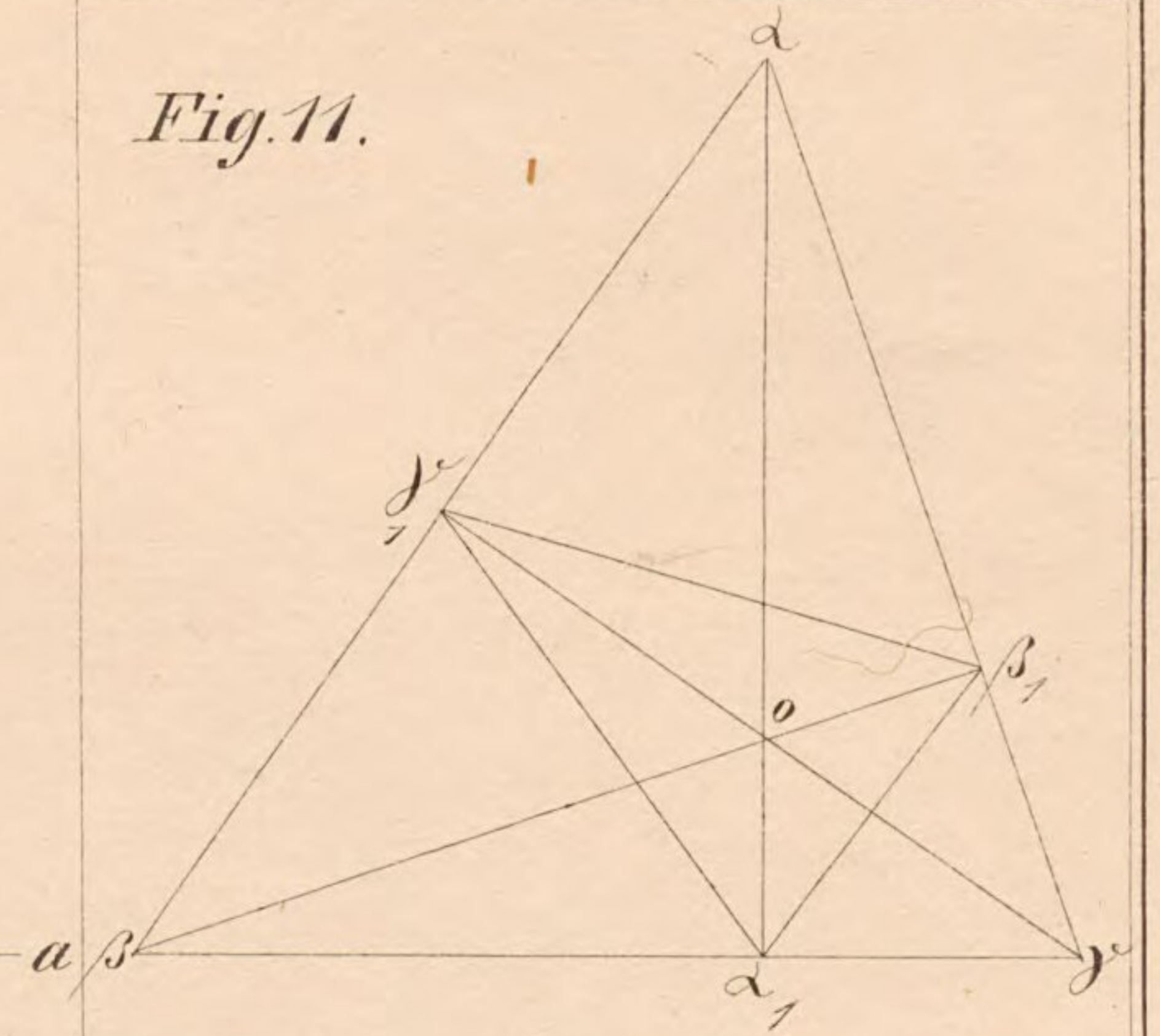


Fig. 3.

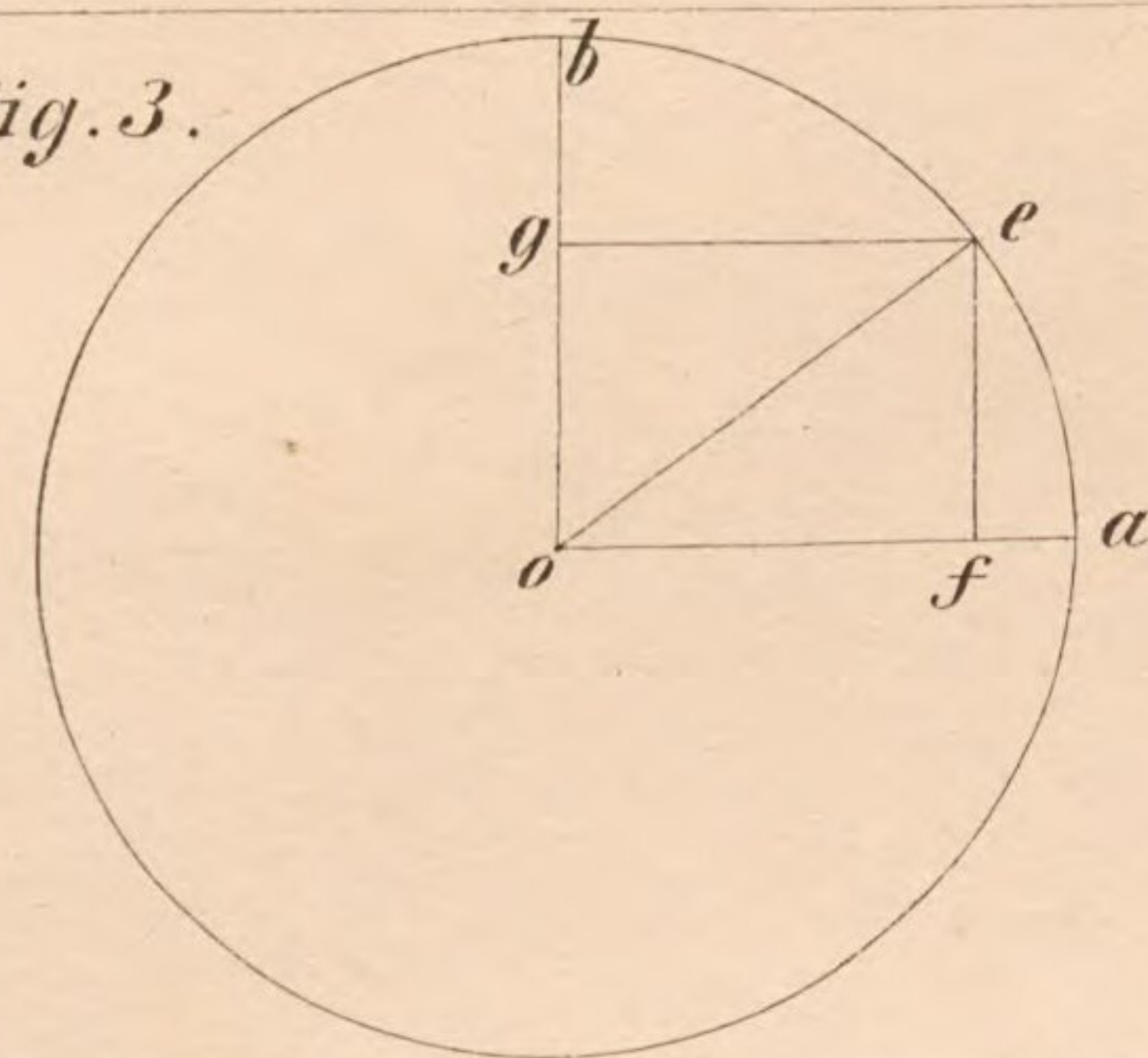


Fig. 9.

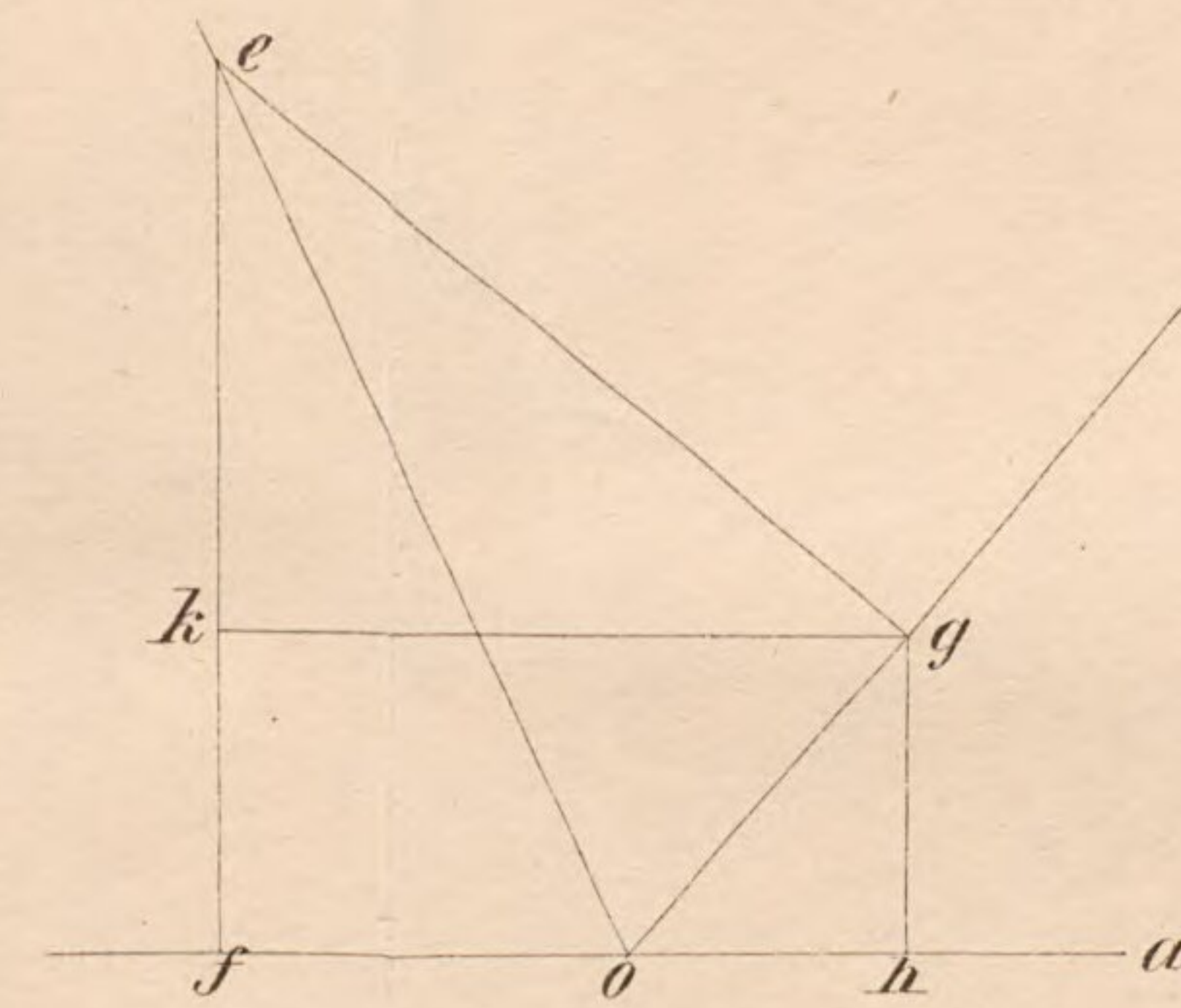


Fig. 12.

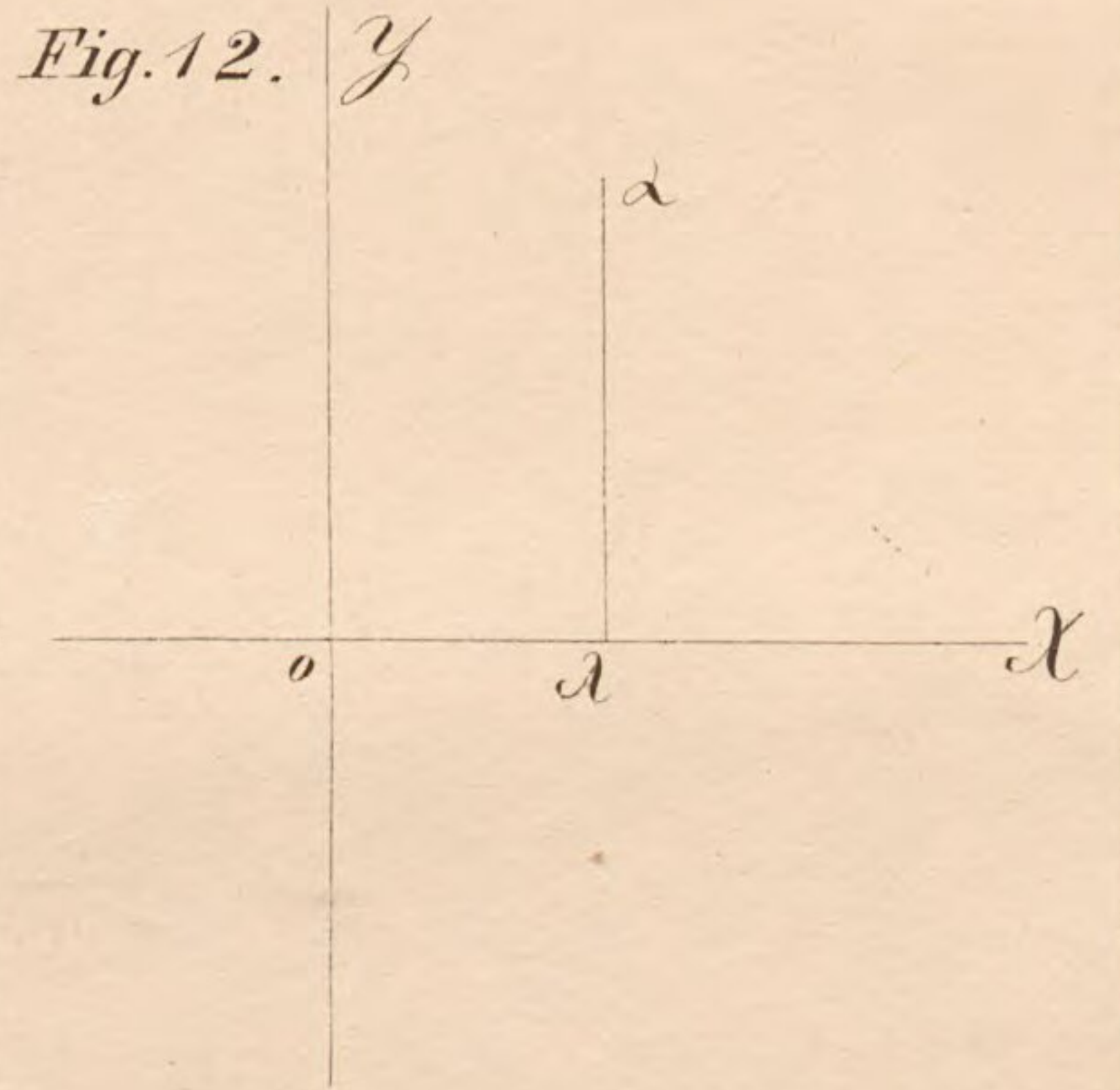


Fig. 4.

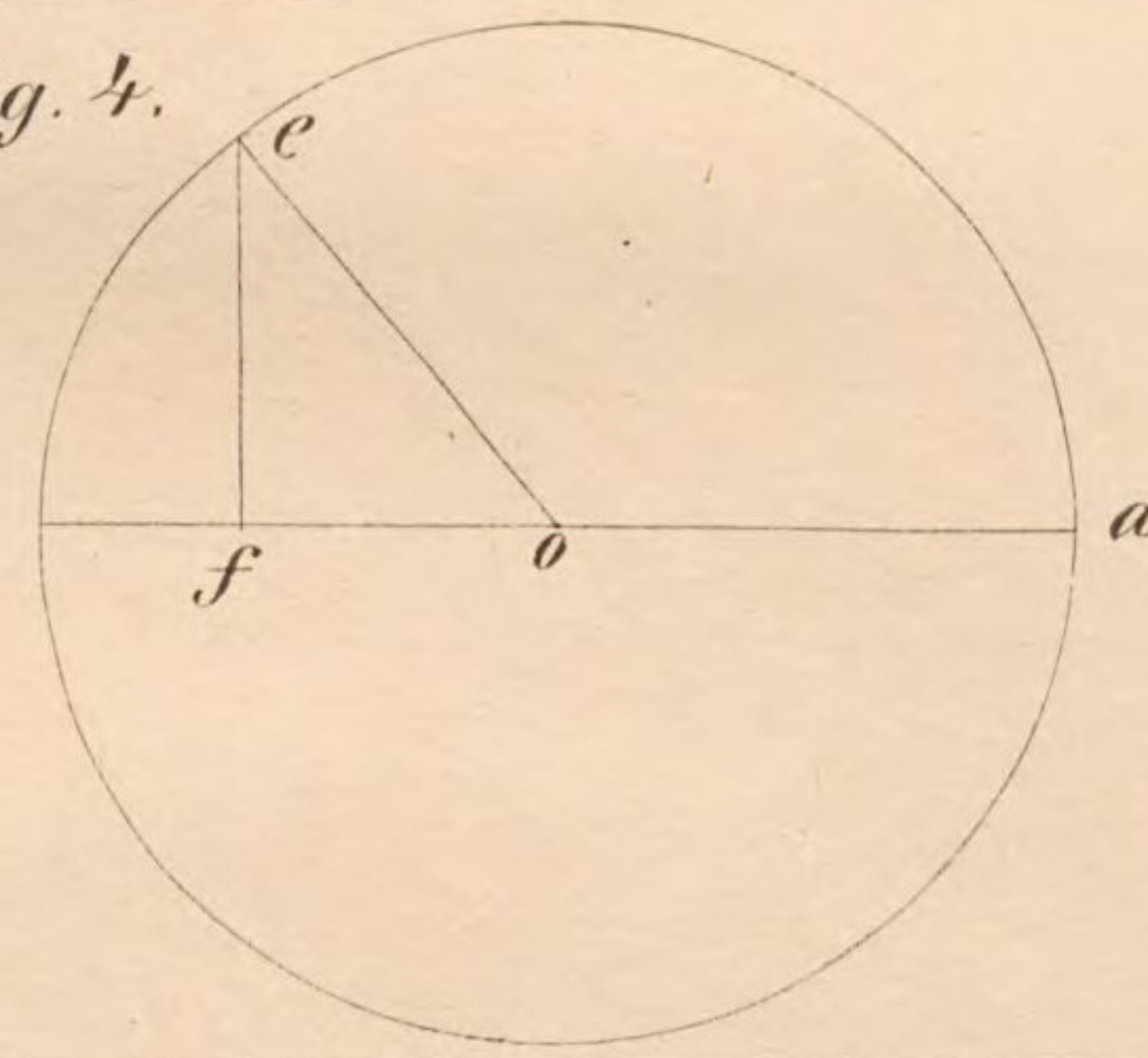


Fig. 5.

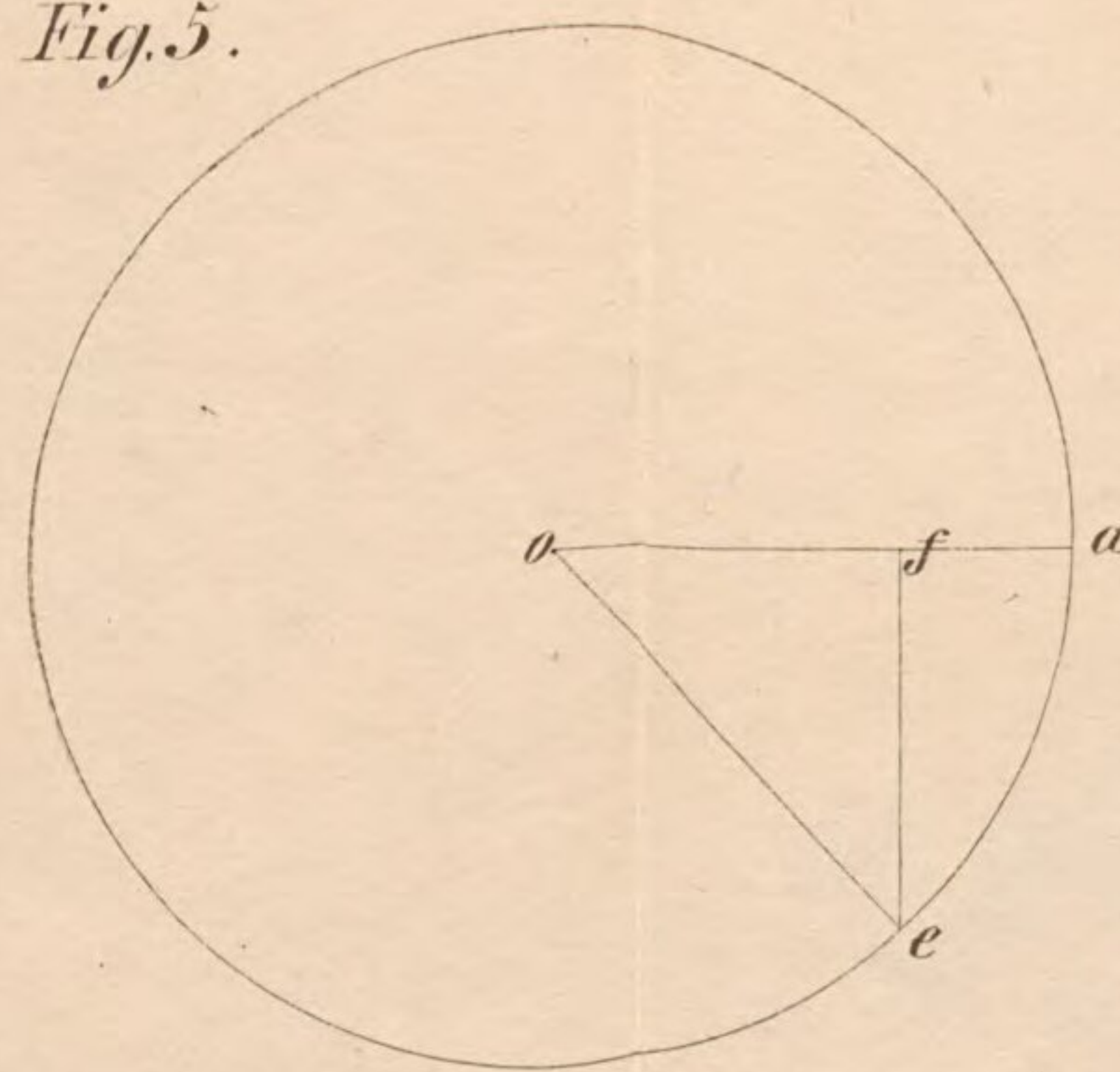


Fig. 6.

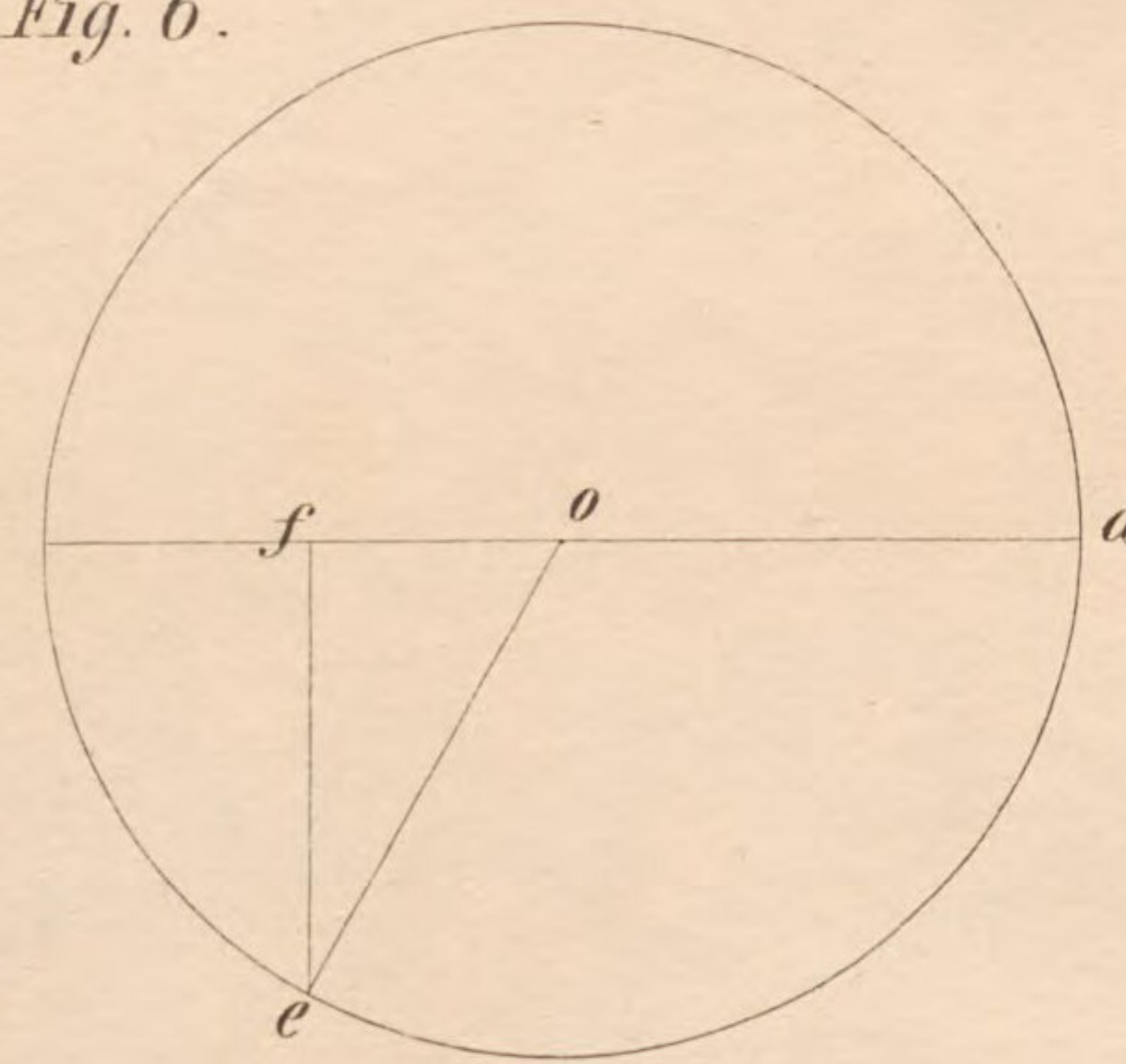


Fig. 10.

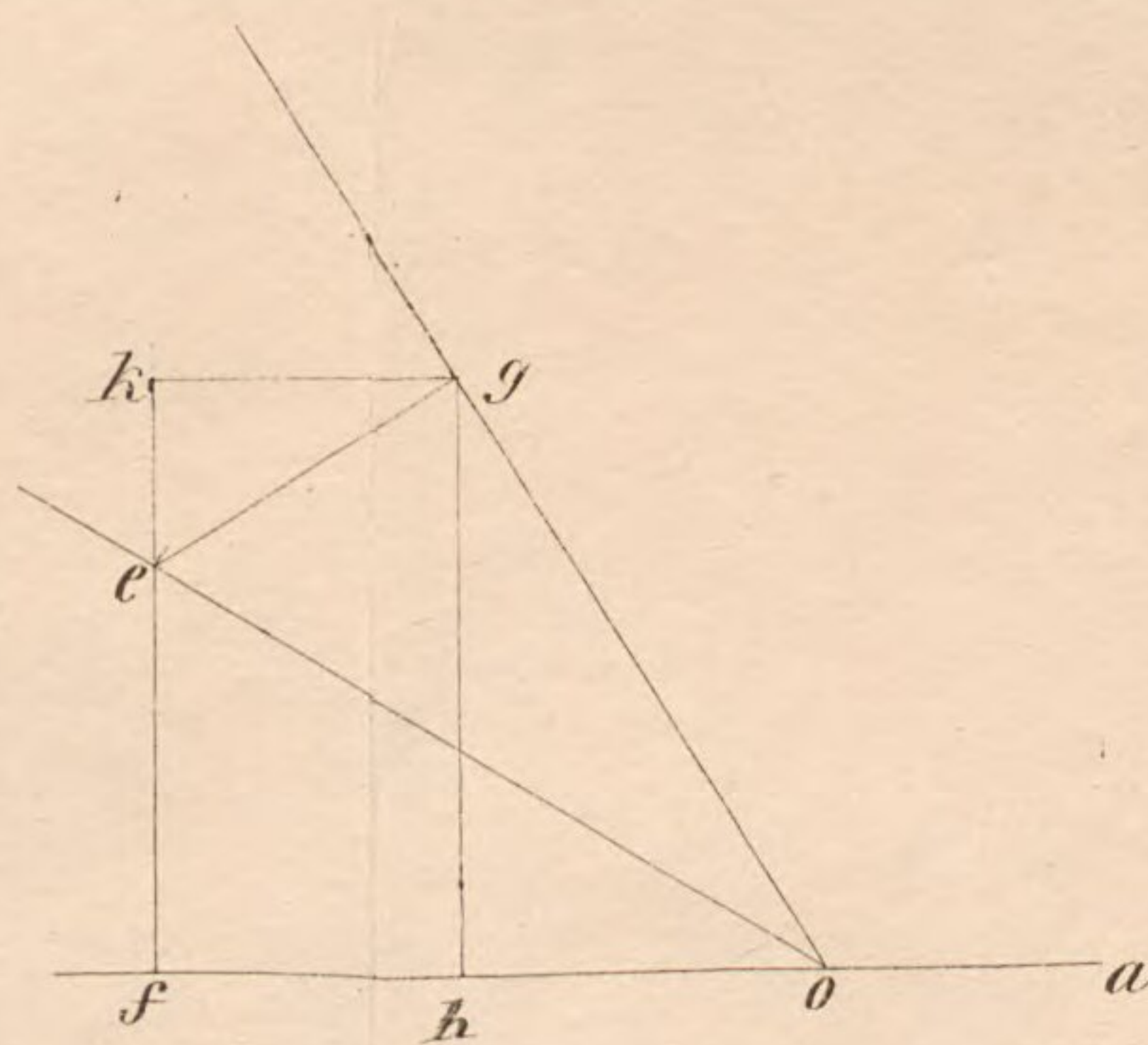
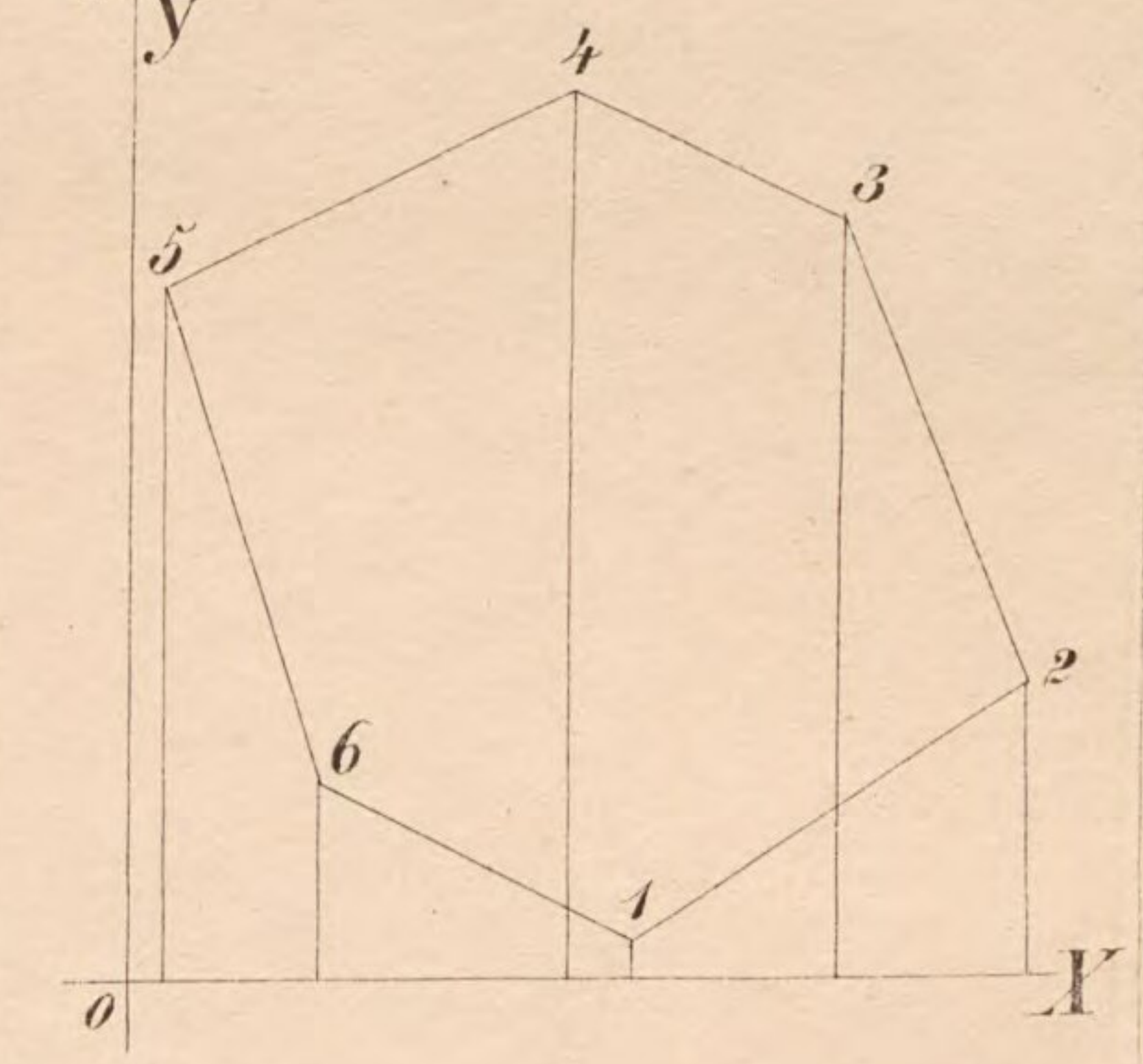
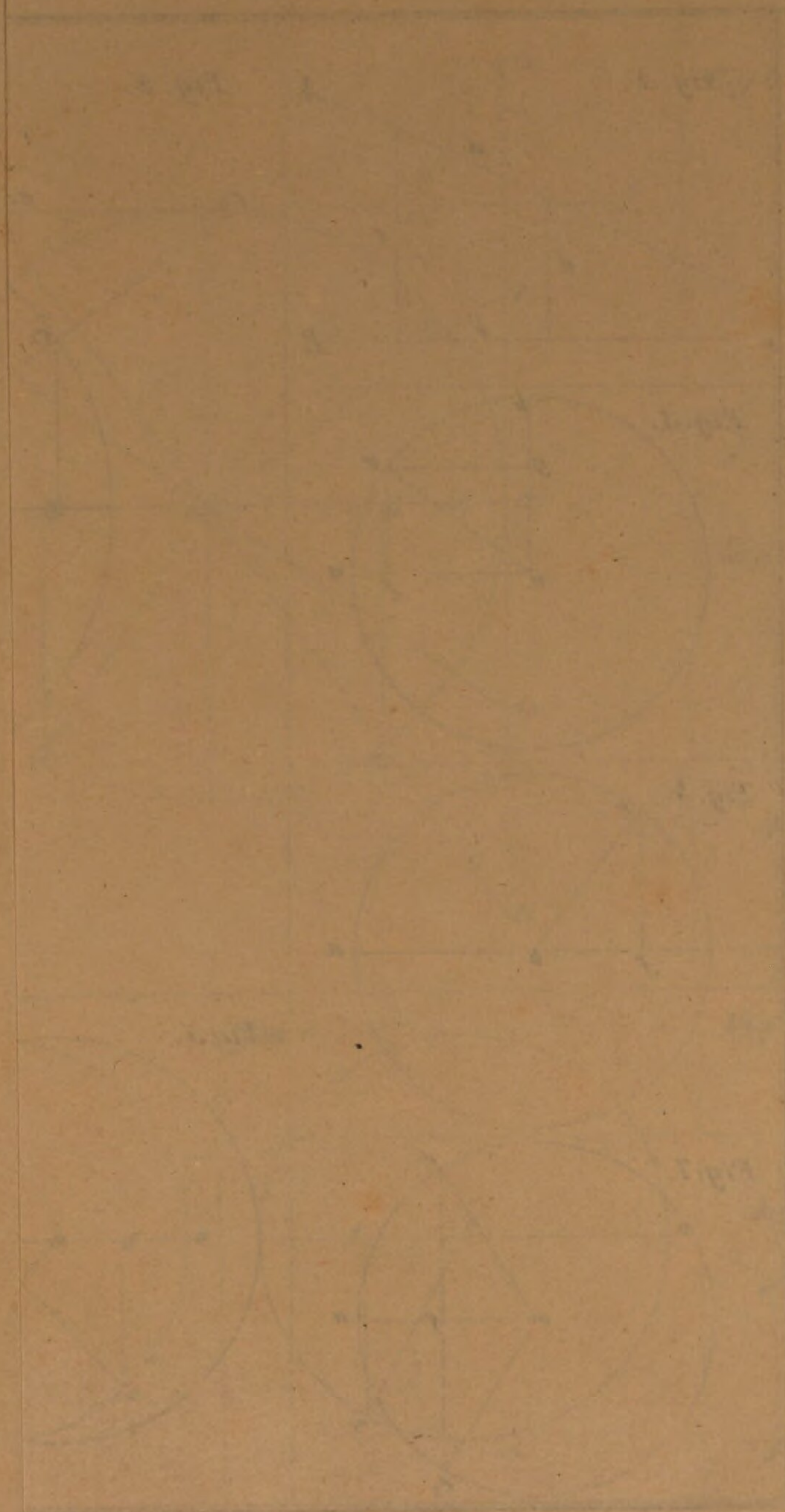


Fig. 13.





Gallenkamp, W.

Die Elemente der Mathematik

Wesel 1850

Math.u. 62 wf

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593817-5